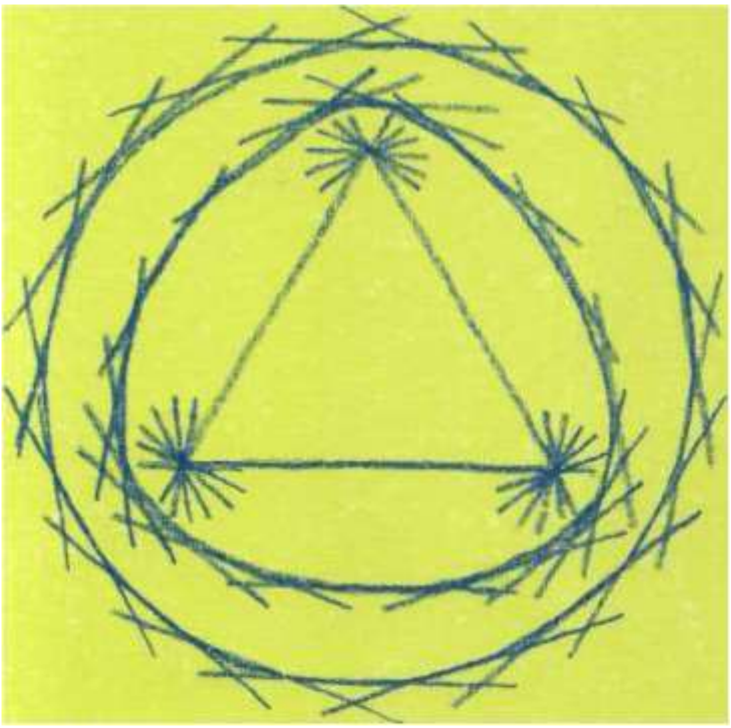
Ernst Schuberth

Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen

Band 2:
Vergleichende Formenlehre und geometrische Grundkonstruktionen in den Klassen 4 und 5



Verlag Freies Geistesleben

Auszug mit Vorwort, Einleitung und Beginn für die 4. Klasse

Inhalt

Vorwort ... 4
Einleitung ... 5
Die vierte Klasse ... 6
Hinführung zur Geometrie ... 6
Vom Kreis zur Ellipse ... 6
Winkel- und Längenmessung ... 8
Vergleichende Formbetrachtungen ... 11
Vom Kreis zum Dreieck ... 11
Übungen zum Dreieck ... 11
Viereckslehre ... 13
Das Haus der Vierecke ... 13
Die wichtigsten Eigenschaften der Vierecke ... 16
Aufgaben zu den Vierecken ...
Licht- und Schattenräume um eine Kugel ...
Die fünfte Klasse ...
Der Kreis ...
Der Kreis als Brandungslinie ...
Gerade und Punkt als Grenzvorstellungen eines Kreises ...
Punkte und Geraden im Verhältnis zum Kreis ...
Symmetrien am Kreis ...
Übungen zur Freihandgeometrie ...
Die Einführung von Zirkel und Lineal ...
Bezeichnungen ...
Geraden- und Kreisübungen ...
Zeichenübungen mit Zirkel und Lineal ...
Die geometrischen Grundkonstruktionen ...
Methodisches ...
1. Grundkonstruktion: Die Mittelsenkrechte ...
Hinführung zur Fragestellung: ...
Herausarbeiten des mathematischen Problems: ...
Die Lösung: ...
Konstruktionsbeschreibung: ...
Die Begründung der Konstruktion: ...
Vereinfachte Konstruktion: ...
Die Ganzheit und der Übergang zu neuen Fragen: ...
Aufgaben zur Mittelsenkrechten ...
2. Grundkonstruktion: Das Halbieren einer Strecke ...
Aufgaben zum Halbieren einer Strecke ...
3. Grundkonstruktion: Das Errichten der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden ...
Aufgaben zur Senkrechten ...
Der Gebrauch des Geodreiecks ...
4. Grundkonstruktion: Das Fällen eines Lotes ...
Aufgaben zum Lot ...
5. Grundkonstruktion: Das Halbieren eines Winkels ...
Aufgaben zum Halbieren eines Winkels ...
6. Grundkonstruktion: Das Übertragen einer Strecke ...

7. Grundkonstruktion: Das Übertragen eines Winkels
8. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt
Aufgaben zur Konstruktion von Parallelen
9. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Mittelparallele zu zwei parallelen Geraden
Aufgaben zur Mittelparallele
Winkel an Parallelen
Abschließende Übungen
Die erste Begegnung mit dem pythagoreischen Lehrsatz
Rückblick und Ausblick
Anmerkungen
Register

Vorwort

Dieses Buch ist Teil einer mehrbändigen Gesamtdarstellung des Geometrieunterrichts in den Klassen 1 bis 8 an Waldorfschulen. Entsprechend den menschenkundlichen Entwicklungsgesetzen werden drei Stufen betrachtet: Die erste umfasst etwa die Klassen 1 bis 3, die zweite die Klassen4 und 5 und die dritte die Klassen 6 bis 8. E. A. K. Stockmeyer hat in seiner Zusammenstellung der Lehrplanangaben Rudolf Steiners als Erster auf die Spiegelung dieser Entwicklungsstufen im Geometrieunterricht aufmerksam gemacht.1 Auf der ersten Stufe, im *Formenzeichnen,* wird die Geometrie als *tätige Geometrie* gepflegt. Das Kind lernt Formen vielfältig erfassen und erzeugen. Es schult seine Feinmotorik und entwickelt ein Gefühl für die Sprache der Formen, ein *Formenfühlen*. Auf der zweiten Stufe treten die *Beziehungen der Formen zueinander* in den Vordergrund. Stockmeyer nennt dies eine *vergleichende Geometrie.* Auf der dritten Stufe beginnt, was wir gewöhnlich als Geometrie bezeichnen: die beweisende *Geometrie.*

Mit dieser mehrteiligen Darstellung der verschiedenen Stufen wird der Versuch unternommen, Inhalt und Zusammenhang der einzelnen Stufen in einem möglichen Aufbau darzustellen. Wie ich schon in anderen meiner Bücher betont habe, betrachte ich den Aufbau als *Anregung* für den selbständig arbeitenden Lehrer. Es widerspräche dem Selbstverständnis der Waldorfschulbewegung, wenn ein möglicher Weg dogmatisch vertreten würde. Vielmehr erhoffe ich, dass diese Darstellung eines Tages eine Weiterentwicklung durch Kolleginnen und Kollegen findet, die von ihren Erfahrungen berichten und Anregungen vermitteln.

Die Gefahr einer kanonischen Festschreibung ist glücklicherweise - außer durch das naturgemäße Unabhängigkeitsbedürfnis der Waldorflehrerinnen und -lehrer - dadurch gemildert, dass zum Geometrieunterricht eine Vielfalt unterschiedlicher und anregender Darstellungen schon vorliegt. Neben den wunderbaren alten Darstellungen von Hermann von Baravalle und von Alexander Strakosch möchte ich vor allem auf die Bücher des erfahrenen Kollegen Arnold Bernhard hinweisen, die sich für viele Kolleginnen und Kollegen als hilfreich erwiesen haben.2

Unbedingt zu erwähnen habe ich das Buch von Arnold Wyss, Ernst Bühler, Fritz Liechti und Rene Perrin, Lebendiges Denken durch Geometrie, das seinem Inhalt nach dieser Darstellung am nächsten kommt. Darin sind viele Anregungen für den Unterricht zu finden, die in einer Waldorfschule in der vierten und fünften Klasse Platz finden können. Deshalbmöchte ich das Studium der entsprechenden Teile jenes Buches besonders empfehlen.

Zu danken habe ich vielen Kolleginnen und Kollegen, deren Arbeit ich bei unterschiedlichen Gelegenheiten kürzer oder länger begegnen konnte, den Kindern, mit denen ich arbeiten durfte, aber auch den Freunden in der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, durch deren jahrelange Zusammenarbeit spirituelle Gesichtspunkte für ein Verständnis der Mathematik gewonnen werden konnten. Mein Dank gilt auch Frau Monika Feles-Baumann, die das Manuskript zu großen Teilen abschrieb.

Mannheim, Freie Hochschule für anthroposophische Pädagogik, im Winter 1997

Ernst Schuberth

Einleitung

Etwa im zehnten Lebensjahr durchlebt das Kind einen seelischen Wandel, der ihn in ein neues, bewussteres Verhältnis zur Umwelt setzt.[3] Der Lehrplan der Waldorfschulen antwortet auf diese Veränderungen unterandere dadurch, dass eine erste Ordnung der Tiere, dann der Pflanzen und - im sechsten Schuljahr - der Mineralien besprochen wird. Für das Tier- und Pflanzenreich lässt sich eine Ordnung altersgemäß finden, in-dem die Tiere auf den Leib und die Pflanzen auf das Seelenleben des Menschen vergleichend bezogen werden.[4]

In der Geometrie kann in methodisch ähnlicher Weise eine vergleichen-de Beschreibung der einfachsten geometrischen Formen - wie des Kreises, der Dreiecke und Vierecke - einsetzen. Das Kind lernt dabei, die einzelnen Formen bewusster anzuschauen, unterschiedliche Formen zu benennen und einzelne Bestimmungsstücke zu unterscheiden. Dabei wird nichtschlussfolgernd das eine aus dem anderen hergeleitet, wie es vom sechsten Schuljahr an angemessen ist, sondern es werden *vergleichend* die Formen in Beziehungen zueinander gesetzt.

Der im Folgenden vorgeschlagene Aufbau kann selbstverständlich nur als *ein* möglicher Weg betrachtet werden. Andere Inhalte statt der behandelten sind durchaus denkbar. Bei der vergleichenden Formenlehre war es mein Anliegen, von den möglichst vollkommenen Formen (Kreis, Quadrat, gleichseitiges Dreieck) auszugehen und aus ihnen die abgeleiteten, weniger symmetrischen Formen hervorgehen zu lassen. Ich sehe dies in Entsprechung dazu, dass in der Naturkunde zuerst der Mensch behandelt wird, der als eine Art Urbild die einzelnen Naturformen umschließt.

Vorgeschlagen wird auch, die elementaren Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal gegen Ende der fünften Klasse auszuführen. Immer wieder habe ich erlebt, mit welcher Begeisterung die Kinder in diesemden Übergang vom Formenzeichnen und der Freihandgeometrie zu beschreibbaren Konstruktionsverfahren vollziehen. Damit wird auch die Möglichkeit geschaffen, in der sechsten Klasse tatsächlich mit der beweisenden Geometrie einzusetzen.

Ein weiteres Anliegen des folgenden Aufbaues ist die Entwicklung von Rau*mvorstellungen* beim Kind. Hat es in den ersten Schuljahren noch vorwiegend ein flächenhaftes Vorstellen,[5] so beginnt es nach dem Entwicklungseinschnitt im zehnten Lebensjahr deutlicher innerlich die dritte Dimension zu erfassen. Auch wenn eine räumliche Geometrie - außervielleicht in der Behandlung der regulären Polyeder und einfacher Volumenberechnungen - der Oberstufe vorbehalten bleiben muss, kann doch gerade eine einfache Betrachtung von Licht- und Schattenverhältnissen viel zur Entwicklung von Raumvorstellungen beitragen.[6] Eine Anregung dafür ist hier nur beispielhaft angedeutet. Ähnliche Betrachtungen können in den Geometrieunterricht oder auch in andere Epochen so eingeflochten werden, wie die Gelegenheit es ergibt. In den Darstellungen für die dritte Stufe (Klasse 6 bis 8) wird manches davon noch genauer ausgeführt.

Ein Wort noch zu den Zeichnungen: Die Freihandzeichnungen sind zum großen Teil zunächst mit Bleistift skizziert und dann mit einemkräftigen Stift nachgezeichnet worden. In anderen Fällen wurde aber mit Zirkel und Lineal konstruiert, damit die gemehrte Gesetzmäßigkeit deutlich wurde, der man auch im reinen Freihandzeichnen möglichst nahekommen sollte. Um den Charakter einer freien Zeichnung anzudeuten, wurde dann die Konstruktion mit Buntstift nachgezeichnet. Einzelne Zeichnungen, die doch als Freihandzeichnungen gedacht sind, wurden erkennbar als Zeichnungen mit Zirkel und Lineal belassen. Sie sind nur zur Orientierung, nicht als Vorbild gedacht.

Die Lehrerinnen und Lehrer werden immer bedenken müssen, dass eine Tafelzeichnung ganz andere Geschicklichkeiten erfordert als eine kleine Zeichnung auf dem Papier. Sie werden also in jedem Fall einige Zeit vorher mit Übungen an der Tafel beginnen müssen. Dies gilt sowohl für Freihand- wie für konstruierte Zeichnungen. Für die Kinder ist von wesentlicher Bedeutung, wie der Lehrer oder die Lehrerin zeichnen. Die tatsächlichen Bewegungsabläufe - ob die Hand ruhig oder nervös, mit starkem oder schwachem Druck usw. geführt wird - sind ein wesentlicher Eindruck, den die Kinder aufnehmen und der ihr Verhältnis zum behandelten Inhalt mitbestimmt!

Ratsam und hilfreich ist es bei schwierigen Freihandzeichnungen, sich mit einer leichten Skizze die Position und wichtige Punkte festzulegen. Von einer guten Vorbereitung hängt der Erfolg ab. Strahlen von der Lehrerin oder dem Lehrer Vertrauen in die Fähigkeiten der Kinder aus und leiten sie sie ruhig und überschaubar an, dann können die Kinder Erstaunliches leisten. Dass dabei die Freihandzeichnungen im Allgemeinen nicht die Genauigkeit einer Konstruktion haben können, ist selbstverständlich. Dafür schult aber das Kind daran unmittelbar seine eigene Konstitution - die Koordination von Auge und Hand, die Feinmotorik und manches andere.

Ein wesentliches Handicap für die gedruckten Zeichnungen ist der Mangel an Farbe. In Kursen bemühe ich mich nach Möglichkeit, Farbensinnvoll zur Hervorhebung geometrischer Strukturen oder überhaupt um der Schönheit willen einzusetzen. Aus finanziellen Gründen ist das hier nicht möglich. Im Unterricht sollte aber die Belebung durch die Farbe nicht fehlen. Zu vermeiden ist allerdings ein sinnloses Buntmachen oder ein Verzieren mit Blümchen und Ähnlichem. Die Schönheit geometrischer Zeichnungen liegt wesentlich in der inneren Gesetzmäßigkeit, die sieoffenbaren und die meistens viel tiefer reicht, als sie auf dieser Stufe überschaut werden kann. Indem das Kind sich tätig und vergleichend betrachtend in die geometrische Formenwelt einlebt, gewinnt es zu ihr diejenige Beziehung, die später Erkenntnisfragen in der Seele aufsteigen lässt und damit zur eigentlichen mathematischen Betrachtungsweise hinführt.

Die vierte Klasse

«Und jetzt können wir in diesem Lebensalter des Menschen auch zur Geometrie übergehen, während wir vorher dasjenige, was dann Geometrie wird, ganz im Zeichnerischen drinnen gehalten haben. Am Zeichnerischen können wir ja dem Menschen Dreieck, Quadrat, Kreis und Linie entwickeln. Die eigentlichen Formen entwickeln wir also am Zeichnerischen, indem wir zeichnen und dann sagen: Das ist ein Dreieck, das ist ein Quadrat. Aber was als Geometrie hinzutritt, wo wir die Beziehungen zwischen den Formen suchen, das beginnen wir erst so um das 9. Jahrherum.»[7]

Mit diesen Worten regt Rudolf Steiner eine Formenlehre an, deren innerer Duktus in der von ihm parallel geforderten Menschen-, Tier- und Pflanzenkunde ausführlicher dargestellt wird. Insbesondere sehe ich eine innere Beziehung zu deren methodischem Aufbau in dem Herstellen von Verwandtschaftsverhältnissen und dem Rückbeziehen auf gewisse Ur-formen. So gehen Dreieck und Quadrat aus dem Kreis, die allgemeineren Vierecke aus dem Quadrat hervor. Wie dies im Einzelnen geschehen kann, wird im Folgenden gezeigt. Dabei handelt es sich um mögliche Themenkreise, die keinen Anspruch auf allgemeine Verbindlichkeit erheben, sondern durch anderes ersetzt oder auch noch stärker in das rein Künstlerische hineingeführt werden könnten.

Wo eine geometrische Formenlehre einen angemessenen Platz im Unterricht findet, wird jeder Lehrer am besten selber entscheiden. Sicher ist aber zum Beispiel ein Teil einer Formenzeichenepoche oder auch ein Anhang an eine Rechenepoche geeignet. Bezüglich der Jahreszeit habe ich sehr gerne im Winter geometrische Betrachtungen durchgeführt.

Hinführung zur Geometrie

Vom Kreis zur Ellipse

Klaus[8] wird herausgerufen und läuft - nach Aufforderung - vor der Klasse einen Kreis. Der Lehrer zeichnet einen Kreis an die Tafel und weist auf den Zusammenhang zwischen der gelaufenen und der gezeichneten Form hin: «Auf dem Boden hat Klaus sich im Kreis bewegt. Auch ich habe mit meiner Hand eine Kreisbewegung vollzogen, und als ihr mit den Augen verfolgtet, was ich zeichnete, habt ihr mit eurem Blick ebenfalls eine Kreisbewegung gemacht. An der Tafel seht ihr die Spur meiner Bewegung, weil ich eine Kreide in der Hand hatte. Dadurch ist die Kreisform auf der Tafel entstanden. Zuerst war die Bewegung da. Jetzt habt ihr in der Kreisform noch die Spur der Bewegung, eine Bewegungsspur.»

Es ist wichtig, auf den Zusammenhang zwischen der gelaufenen Form und der Tafelzeichnung sorgfältig hinzuweisen. Im Sinne der Brunerschen Repräsentationsmodi könnte man von einer enaktiven und einer ikonischen Darstellung sprechen.[9] Verständnisschwierigkeiten treten für die Kinder häufig dort auf, wo von einer Darstellungsform zu einer anderen übergegangen wird, ohne dass der Zusammenhang sorgfältig besprochen wurde. Die Bewegung des Kindes vor der Klasse wird als dreidimensionale Handlung (enaktiv) erlebt. Die Tafelzeichnung erscheint für das Kind -vor allem wenn die hervorbringende Bewegung beendet ist - in erster Linie zweidimensional-bildhaft (ikonisch). Sie verliert den dreidimensionalen Charakter, mit dem alle leiblichen Tätigkeiten verbunden sind. Es ist deswegen wichtig zu zeigen, wie dieses Bild aus einer Tätigkeit hervor-gegangen ist und im Anschauen wiederum durch eine Tätigkeit - in der Bewegung der Augen - erfasst wird.

Natürlich ist die Kreisform den Kindern lange bekannt und im Formen-zeichnen und in der Eurythmie oft gebildet worden. Um nun in eine vergleichende Formenbetrachtung einzutreten, geht der Lehrer zunächst selber den Kreis und zieht ihn allmählich in wiederholtem Herumgehen in die Länge, so dass eine Ellipse entsteht. Die Kinder beobachten dabei die eintretende Veränderung: An den zwei Enden - den Hauptscheiteln - werden die Krümmungen immer stärker, dazwischen - an den Nebenscheiteln – immer schwächer. Schließlich kann man etwa das Folgende herausfinden:

Abb. 1: Der Kreis als Bewegungsspur.

Geht man einen Kreis, so schreitet man Schritt für Schritt fort und dreht sich dabei gleichmäßig. Geht man eine Ellipse, so schreitet man auch immer weiter fort, aber das Drehen ist an den schlanken Enden stärker, dazwischen schwächer. Das Herumdrehen wird rhythmisiert.

Abb. 2: Vom Kreis zur Ellipse.

Auf dieses *Drehen* und *Fortschreiten* beim Umlaufen einer Form ist einige Zeit zu verwenden. Beide Bewegungen kann man isoliert ausführen lassen und nach dem Unterschied fragen. Vielleicht gelingt es, dass gesagt wird: Beim Fortschreiten ändert man seinen *Ort,* beim Drehen die *Richtung* des Blickes.

Drehen und Fortschreiten sind also ganz unterschiedliche Bewegungen. Getrennt vollzogen, wird dies recht gut verstanden. Dass aber beim Um-laufen eines Kreises (der Nase nach) beide Bewegungen gemeinsam ausgeführt werden, bereitet manchen Kindern Verständnisschwierigkeiten. In meiner Münchener Klasse war es vor allem Klaus, der dies partout nicht einsehen wollte. Dass er weiterging, war ihm klar; das Drehen dabei schien ihm unverständlich. Ich ließ ihn also noch einmal sich nur drehen, und er hatte aufzuzählen, was er ringsum sah. Drehte er sich einmal ganz herum, so hatte er ringsum alle Wände gesehen. Nun lief er noch einmal den Kreis und hatte zu beschreiben, was er sah. Auch jetzt hatte er ringsum alle Wände gesehen, als der Kreis vollendet war. Irgendwie blieb ihm die Sache verdächtig. Ich versuchte es noch auf andere Weise: «Wenn du dich einmalherumdrehst, haben dich die anderen Kinder einmal von allen Seitengesehen. Gehe noch einmal einen Kreis, und ein Kind wird beschreiben, von wo aus es dich sieht.» Klaus tat dies, und ein anderes Kind sagte: «Bauch, linke Schulter, Rücken, rechte Schulter, Bauch.» Während Klaus also den Kreis gelaufen war, hatte ein anderes Kind ihn von allen Seiten sehen können - wie beim vollen Herumdrehen um die eigene Achse.

Indem wir dies alles taten, gewannen auch die letzten Kinder die Überzeugung, dass es mit dem Drehen beim Gehen auf einer Kreislinie tatsächlich etwas auf sich hat. Nur Klaus blieb misstrauisch. Schließlich half Folgendes. Ich sagte: «Gehe noch einmal ein Stück geradeaus, und dann drehe dich eine Weile. Was ist der Unterschied?» Klaus tat dies und sagte: «Beim Drehen wird einem schwindelig, beim Geradeausgehen nicht.»

«Gut», sagte ich, «wenn einem beim Drehen schwindelig wird und wenn man sich beim Kreisläufen auch dreht, dann müsste einem auch beim Kreisläufen schwindelig werden.» Nun musste Klaus, so schnell er konnte, einen kleinen Kreis laufen, und richtig: nach der fünften Umrundung begann er bedenklich zu schwanken und nahm die am Schwindelgefühlgewonnene Überzeugung mit auf seinen Platz, dass man auch beim Ablaufen einer Kreislinie sich dreht.

Die *Orte,* welche man nacheinander auf dem Kreis beim Durchlaufen einnimmt, kann man als die *Punkte* auf der Kreislinie darstellen. Wie soll man die sich ändernden Richtungen andeuten? Dazu kann man die Kinder auffordern, in dem Bild der Kreisbewegung - also beim Kreis an der Tafel – die jeweiligen Blickrichtungen einzuzeichnen, welche man an den einzelnen Orten hat. Es entsteht etwa das folgende Bild (Abb. 3a):

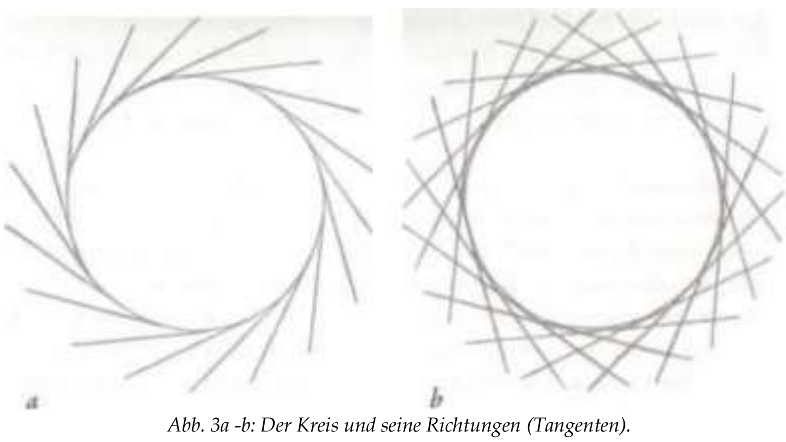


Abb. 3a -b: Der Kreis und seine Richtungen (Tangenten).

Die Blickrichtung ist hier durch Strahlen in der Form von Halbtangentenangedeutet. Ist das geschehen, so kann man noch einmal nach der Blickrichtung fragen, wenn der Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Es entsteht dann das vollständige Bild des Kreises mitseinen Tangenten. (Dies ist weniger geometrisch als vielmehr naiv als Bild zu behandeln.) Gibt man einem Kind beim Abschreiten der Kreislinie einen längeren Stock unter den Arm, der jeweils in die Blickrichtung weist, dann lässt sich an ihm sehr schön das Drehen der Tangente beim Umlaufen des Kreises beobachten (Abb. 3b).

Nun können wir noch einmal die aus dem Kreis hervorgegangene Ellipse betrachten, wobei wir die Zeichnung durch die Tangenten ergänzen. Indem die freihändig eingezeichneten Tangenten untereinander etwa gleiche Winkel bilden, wird ihre Häufung an den stark gekrümmten Scheiteln anschaulich (Abb. 4). Ich deutete die stärkere Dynamik, die im Drehen liegt, auch mit Farben an. Bei der stärksten Krümmung zeichnete ich die Linie rot, dann mit abnehmender Krümmung orange, dann gelb und schließlich grün bei der schwächsten Krümmung.

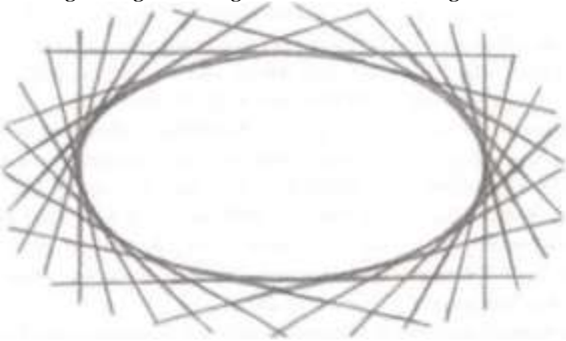


Abb. 4: Die Ellipse und ihre Richtungen (Tangenten).

Indem man auf die beiden Urformen der Bewegung achtet, das Drehen und das Fortschreiten, hellt sich das Erleben des Unterschiedes von Kreis und Ellipse für das Bewusstsein ein Stück weit auf.

Winkel- und Längenmessung

Winkel- und Längenmessung werden in der Regel an Waldorfschulen im Zusammenhang mit der Hausbauepoche und dem Sachrechnen schon im dritten Schuljahr behandelt. Der rechte Winkel ist zum Beispiel durch das Lot, das der Maurer verwendet, um eine Wand im rechten (= richtigen)Winkel mauern zu können, bekannt. Das Lot und die Waagerechte (Wasserwaage) bilden den rechten Winkel.

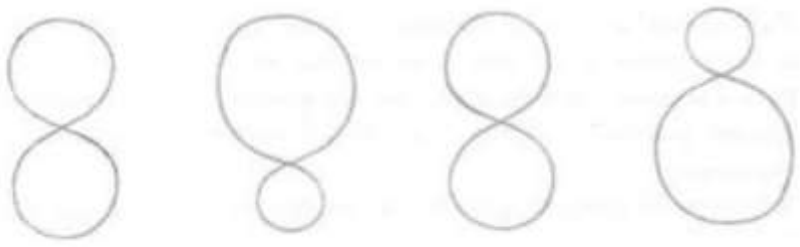
Die Behandlung von fortschreitender und drehender Bewegung gibt Anlass, in der Behandlung des Winkels einen Schritt weiterzugehen.[10] Zunächst können wir noch einmal ein Kind eine Kreislinie laufen lassen. Dabei stellen wir nun ein zweites Kind in die Mitte, welches das herum-gehende Kind so mit seinem Blick begleitet, dass es sich mit dreht. Es dreht sich um einen vollen Winkel, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird. Nun kann man darauf hinweisen, wie man sich auch dreht, wenn man die Sonne im Laufe eines Tages mit dem Blick verfolgt. Natürlich geht das sehr langsam, und man wird es kaum einen Tag lang tun. Mit dem Arm kann man aber die Tagesbewegung der Sonne mit größerer Geschwindigkeit zeigen, und man kann auch darauf aufmerksam machen, wie der Sonnenbogen sich unter dem Horizont in der Nacht fortsetzt.

Die Kinder werden die Sterne schon beobachtet haben, und ohne von der späteren Astronomieepoche schon zu viel vorwegzunehmen, kann man die Sternenbahnen in ihrem Verhältnis zu den Himmelsrichtungen Osten, Süden, Westen und Norden schildern. Manche Kinder werden bereits bemerkt haben, dass zu verschiedenen Jahreszeiten verschiedene Sterne am Nachthimmel sichtbar sind. Vielleicht kann man schon schildern, was eine genauere Beobachtung ergibt:

Blickt man nämlich jede Nacht zur gleichen Zeit in die gleiche Richtung- zum Beispiel genau nach Süden dann sieht man, dass die gleichen Sterne jeden Tag etwa um vier Minuten früher in dieser Richtung ankommen. Nach etwa 360 Tagen (genauer nach 365 1/4 Tagen), also nach einem Jahr, kommen die gleichen Sterne zur gleichen Zeit wieder in die Beobachtungsrichtung. So verschiebt sich Nacht für Nacht der Sternenhimmel ein wenig. Diese tägliche Verschiebung haben die Alten als Maß für das Drehen gewählt, und zwar haben sie, da sich mit 360 leichter rechnen lässt als mit 365 1/4, den 1/360 Teil der vollen Drehung als Einheit für die Winkel-messung gewählt. Diese Einheit bezeichnet man als 1 Grad und schreibt1°. Während also das Maß für die Länge (ein Meter, ein Yard oder was auch immer) vom Gehen auf der Erde genommen wurde, stammt das Maß für das Drehen vom Himmel. Es ist ein Himmelsmaß. - Die Breite des Daumens erscheint bei ausgestrecktem Arm etwa unter 1°.

Die Bewegung der Sonne am Himmel ist auch im Drehen der Zeiger auf dem Zifferblatt einer Uhr abgebildet. Nur dreht sich der kleine Zeiger in24 Stunden zweimal, nicht einmal wie die Sonne. Das hängt damit zusammen, dass man früher bei der Zeitmessung die Tages- und die Nachtzeiten als zwei Kreisläufe ansah. Man teilte die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang und von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang in jeweils zwölf Stunden. Dadurch wurden natürlich die Stunden im Sommer und im Winter unterschiedlich lang, und man findet heute noch in Museen alte Kirchturmuhren, bei denen morgens und abends an der «Unruhe» Gewichte verhängt wurden, damit sie tags und nachts verschieden schnell ging.

Die beiden Zeitenkreise kann man durch eine Lemniskate (8) darstellen, wobei der obere Bogen den Tag, der untere die Nacht darstellt. Im Laufe des Jahres nimmt die Lemniskate dann eine wechselnde Gestalt an.



Frühling **Sommer** **Herbst** **Winter**

Abb. 5a - d: Der im Jahr wechselnde Tag- und Nachtkreis.

Es gab ein *rhythmisch atmendes Zeitmaß* im Jahreslauf. Gewöhnlich standen die Menschen mit Sonnenaufgang auf und arbeiteten bis Sonnenuntergang. Dann schliefen sie. Was im Sommer mehr gearbeitet wurde, glich sich im Winter wieder aus. Auf dem Zifferblatt der Uhr sind sozusagen die beiden Kreisläufe übereinander geklappt. Deswegen dreht sich der kleine Zeiger *zweimal* in 24 Stunden herum.

Früher zählte man vielerorts die Stunden auch anders als heute: Mit dem Sonnenaufgang begann die *erste* Stunde, dann folgte die *zweite* und so fort bis zur *zwölften,* die mit Sonnenuntergang endete. Dann begann die erste Nachtstunde. Die *neunte* Tagesstunde[11] ging also nach unserer heutigen Benennung von zwei bis drei Uhr am Nachmittag. Wegen der Schwierigkeit, die sich im Umgang mit den Ordensregeln ergab, machte dann die katholische Kirche das Zeitmaß starr, indem sie die Tag- und die Nacht-stunden zusammenzählte und in 24 gleiche Teile unterteilte. So entstand unsere heutige Zeitmessung. Notwendig wurde dies, als in nördlichen Ländern, wo im Sommer die Nacht sehr kurz ist, die Ordensregeln, welche feste Gebete für die einzelnen Tag- und Nachtstunden verlangten, nicht mehr befolgt werden konnten.

Die Winkelmessung muss nun geübt werden, indem in möglichst vielfältiger Weise Winkel dargestellt werden.

Beispiele sind: Drehe dich um 360°, um 180°, um 90°, um 45°.

Lass deine Arme einen Winkel von 90° (180°, 45°) bilden.12

Zeige die gleichen Winkel wie in Aufgabe 2 zwischen Ober- und Unterarm.

Zwei Kinder laufen unter bestimmten Winkeln vom gleichen Punkt aus in verschiedene Richtungen. Hier müssen sie vor allem auch auf die Bahn des jeweils anderen achten, um den richtigen Winkel einhalten zu können. Je kleiner der Winkel ist, desto langsamer entfernen sie sich voneinander.

Winkel in der Umgebung der Kinder werden auf ihre Größe geschätzt.

Welche Winkel sind in der folgenden Figur zu finden (Abb. 6)?

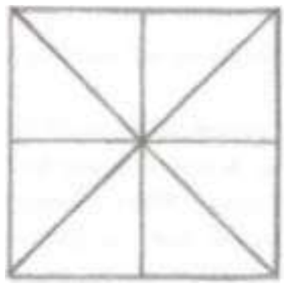


Abb. 6: Welche Winkel sind in dieser Figur zu finden?

Nun kann auch genauer benannt werden, was den Kindern aus dem Formenzeichnen der ersten Jahre gut vertraut ist: dass es *stumpfe* und *spitze* Winkel gibt und dass die Geometer einen Winkel, der kleiner als 90°ist, als *spitz* bezeichnen, einen Winkel, der zwischen 90° und 180° liegt, als *stumpf.* Der *rechte* Winkel besitzt 90°. Einen Winkel von 180° nennt man *gestreckt,* über 180° finden wir den *überstreckten* Winkel. 360° machen einen *vollen* Winkel (vgl. Abb. 7).

Naheliegend ist es, die Verbindung zur Bruchrechnung herzustellen: Die Einheit ist die volle Drehung. Man kann die Kinder nun eine Viertel-drehung, eine Dritteldrehung, eine halbe Drehung und andere Drehungen ausführen lassen und die zugehörigen Gradzahlen bestimmen. Ein Grad ist 1/360 der vollen Drehung.

Auch an der Uhr lässt sich der Umgang mit Winkeln üben. Beispiele für solche Aufgaben sind: Um wie viel Grad dreht sich der große Zeiger in einer Minute, in zwei, drei, vier, fünf, sechs, zehn, zwölf, fünfzehn, zwanzig, dreißig, fünfundvierzig Minuten? Um wie viel Grad dreht sich in dieser Zeit der kleine Zeiger? (Es ist immer ein Zwölftel des großen Zeigers.)

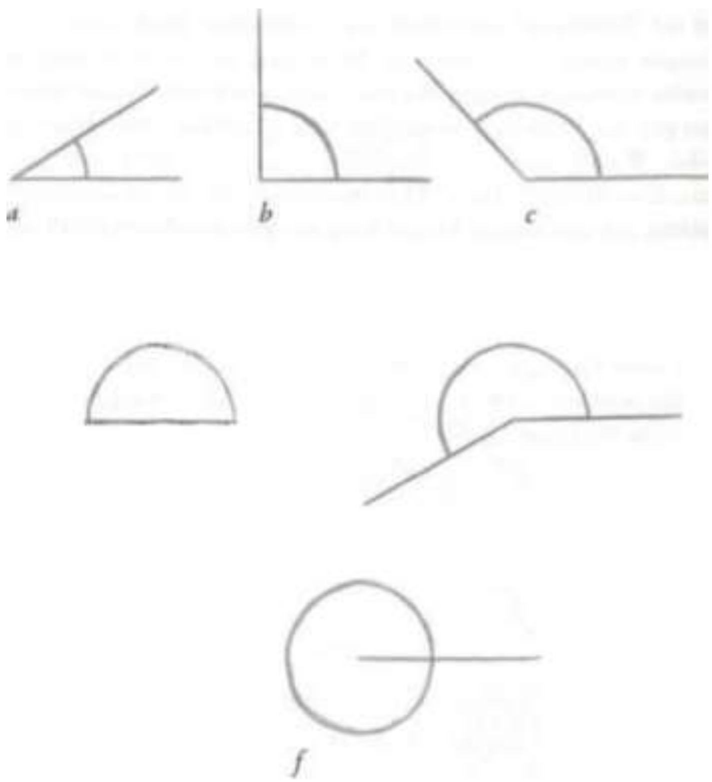


Abb. 7a – f: Die verschiedenen Winkelformen.

Die Verbindung des Bruchrechnens mit dem Drehen kann auch helfen, die häufig verwendete Darstellung der Brüche durch Kreissektoren (Tortenstücke) nicht zu einer einseitigen Fixierung für die Vorstellung von Brüchen zu machen. Umgekehrt ist es wichtig zu vermeiden, dass Winkel als Kreissegmente verstanden werden. Kreissegmente sind Flächenstücke, Winkel werden von Richtungen gebildet. Kreissegmente können auch bei gleichem Winkel unterschiedliche Größe haben. So bedeutet ein Zwölftel einer Torte je nach Tortengröße sehr unterschiedlich viel Kuchen. Winkelsind von solchen Flächen oder Raumgrößen ganz unabhängig.[13]

Sind die Winkel und das Winkelmaß anfänglich besprochen und durch Übungen gesichert, sollten noch die Winkel an zwei sich schneidenden Geraden behandelt werden. An ihnen bilden sich *vier* Winkel, wobei zwei Paare gleicher Winkel zu beobachten sind. Man bezeichnet sie als *Scheitelwinkel.* Winkel aus unterschiedlichen Paaren ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel (180°). Man bezeichnet sie als *Nebenwinkel.* Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der *Scheitel* aller vier Winkel. Die*Halbgeraden,*[14] die einen Winkel einschließen, heißen seine *Schenkel.*

Man kann aber auch darauf hinweisen, dass parallele Geraden ja dieselbe Richtung besitzen. Blickt man also von einer der Geraden aus in deren Richtung und dann von der anderen, so findet keine Richtungsänderung, also keine Drehung, statt. Der Winkel zwischen parallelen Geraden ist also null.

Im Anschluss hieran kann auch die Frage nach den Winkeln zwischenparallelen Geraden gestellt werden. Zur Antwort kann man die Parallelendurch einen Grenzprozess entstehen lassen, bei dem der Scheitel ins Unendliche wandert (Abb. 8 a - c). Dabei nehmen die Schenkel immer mehr die gleiche Richtung an.

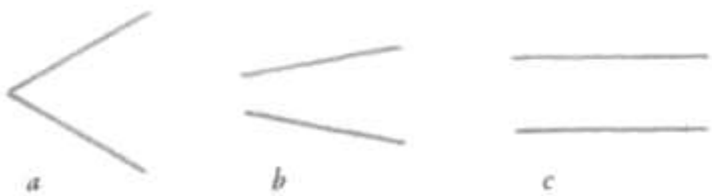


Abb. 8a - c: Welchen Winkel schließen parallele Geraden ein?

Vergleichende Formbetrachtungen

Vom Kreis zum Dreieck

Ähnlich, wie wir den Übergang vom Kreis zur Ellipse vollzogen haben, können wir auch vom Kreis zum Dreieck übergehen. Dazu lassen wir zunächst wieder ein Kind einen Kreis laufen, den wir allmählich in ein dreischeiteliges Oval und schließlich in ein Dreieck überführen.

Abb. 9: Vom Kreis zum Dreieck.

Wieder können wir über die Rhythmisierung von Drehen und Fortschreiten sprechen. Beim Dreieck zerfallen die beiden Bewegungsarten: Auf den Seiten des Dreiecks schreiten wir nur fort; in den Ecken drehen wir uns nur. Dies lässt sich wieder sehr schön mit Farben darstellen.

Mit dem gleichseitigen Dreieck können eine Vielzahl elementarer Übungen zur Freihandgeometrie durchgeführt werden. Wir deuten mögliche Übungen an, die vom Lehrer jeweils auf der Tafel begonnen und von den Kindern selbständig fortgesetzt werden.

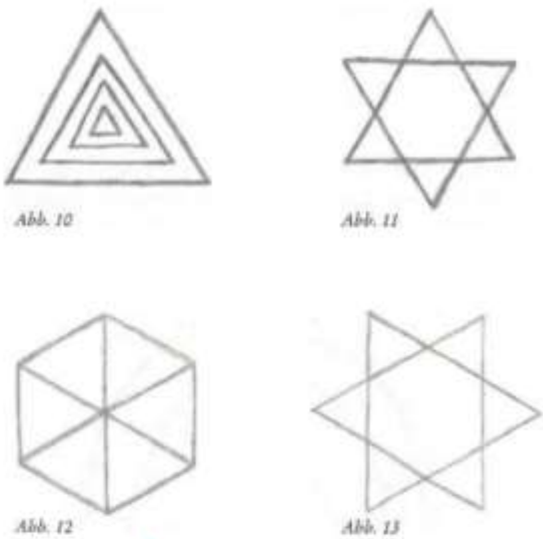


Abb. 10-13: Übungen mit dem gleichseitigen Dreieck.

Übungen zum Dreieck

1. Wachsende und kleiner werdende Dreiecke (Abb. 10).
2. Zwei sich durchdringende Dreiecke als Sechsstern (Abb. 11).
3. Sechs gleichseitige Dreiecke um einen Punkt so anordnen, dass ein regelmäßiges Sechseck entsteht (Abb. 12).
4. Die Dreiecke des Sechsecks nach außen klappen lassen, so dass ein Sechsstern entsteht (Abb. 13).
5. Das (gleichseitige) Dreieck streckt sich (Abb. 14a), duckt sich (Abb.14b) und schwingt auf und ab (Abb. 14c).
6. Das Dreieck wendet sich neugierig zur Seite (Abb. 15a) und schwingt zu beiden Seiten (Abb. 15b).

Ein Dreieck mit einem rechten Winkel wandert mit der Spitze übereiner Seite hin und her und behält dabei immer seinen rechten Winkel(Abb. 16).

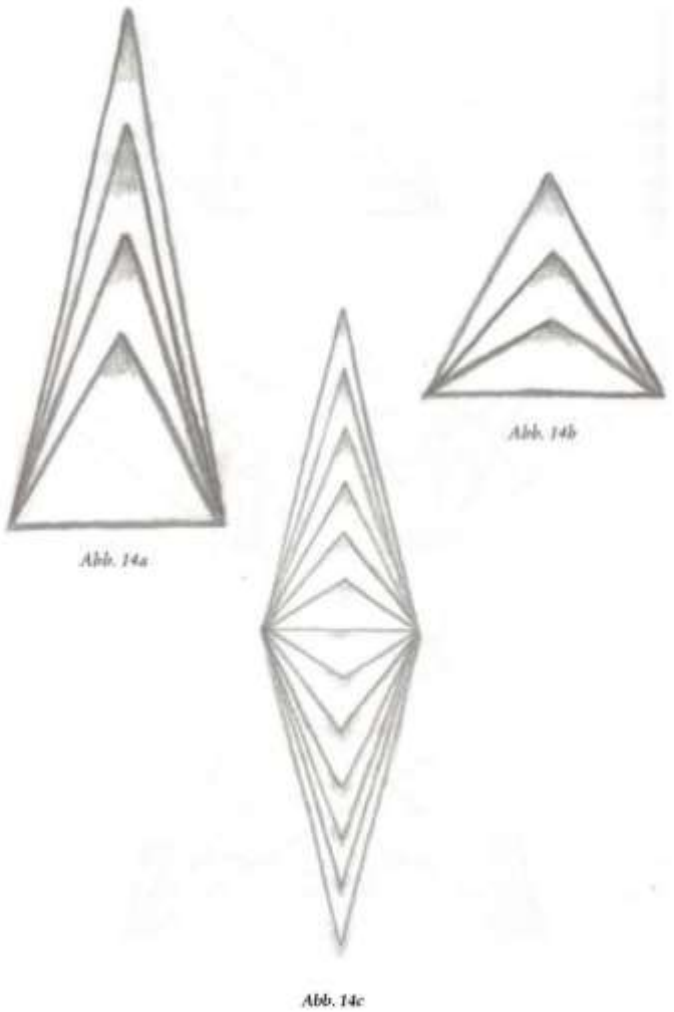


Abb. I4a-c: Übungen mit dem Dreieck.

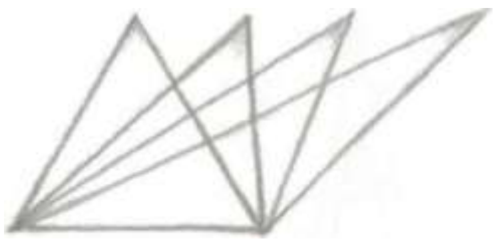


Abb.15a

Abb. 15b

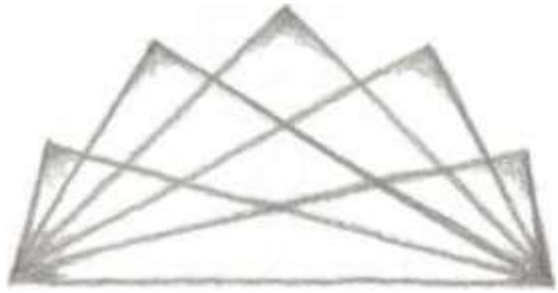


Abb. 16

Abb. 15 und 16: Dreiecksübungen

Viereckslehre

Wie das gleichseitige Dreieck kann auch das Quadrat aus dem Kreis durch allmähliche Umwandlung des Bewegungsverlaufes gewonnen werden, und so wie das Dreieck anfänglich verwandelt wurde, können wir auch die Verwandlungen des Vierecks studieren. Wieder kann man besprechen, wie man auf den Seiten *fortschreitet,* in den Ecken sich *dreht* und so die Winkelbeschreibt (Abb. 17).

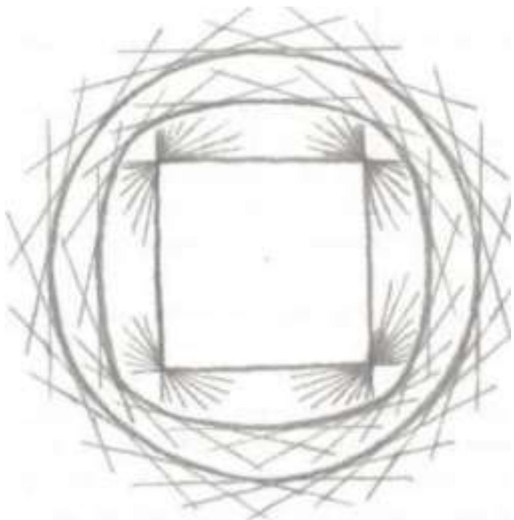


Abb. 17: Vom Kreis zum Quadrat

Um für die Vierecksformen beschreibende Begriffe zu haben, gehen wir von der Symmetrie des Quadrates aus. Damit kann eine Ordnung der wichtigsten Vierecksformen beschreibend gewonnen werden.

Das Haus der Vierecke

Das Quadrat besitzt vier Symmetrieachsen: Zwei gehen durch gegenüber-liegende Ecken; sie werden als *Diagonalen* bezeichnet. Zwei weitere Symmetrieachsen gehen durch gegenüberliegende Seitenmitten. Wir nennen *sie Mittellinien*.

Alle vier Innenwinkel sind gleich und ebenso alle vier Seiten. Die Mittel-linien sind gleich lang und halbieren sich gegenseitig. Dasselbe gilt für die Diagonalen. Beide Paare bilden unter sich jeweils Winkel von 90°.

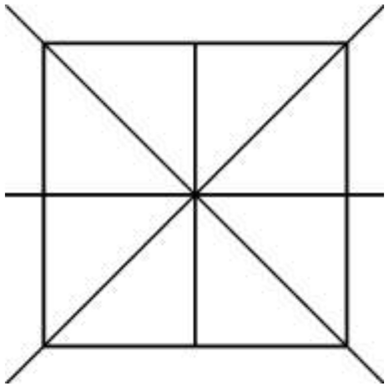


Abb. 18: Das Quadrat mit seinen Symmetrieachsen

Man kann nun die Veränderungen des Vierecks, die sich vor allem durch die Symmetrien beschreiben lassen, mehr fachlich oder - was sich in vergleichenden Untersuchungen sehr bewährt hat - mehr phantasievoll im Zusammenhang behandeln. Zum Beispiel habe ich etwa das Folgende den Kindern erzählt und mit den entsprechenden Zeichnungen begleitet:

Der Stammvater des Viereckgeschlechtes, das Quadrat, hatte zwei rechtunterschiedliche Kinder. Das eine war sehr gewissenhaft, dabei aber vierschrötig und ein wenig unbeweglich. Das war das *Rechteck.* Es wollte möglichst allen Leuten es immer recht machen. Deshalb wagte es kaum, von sich aus etwas zu tun. Am liebsten wartete es, bis man ihm sagte, was es tun sollte. Dabei blieb es aber lange einfach rechteckig.
Ganz anders war sein Geschwister. Es wollte beweglich und elegant wirken, aber da es der Vierecksfamilie entstammte, blieb ihm doch etwas Eckiges und Raues in seinem Wesen. Es wurde die *Raute* genannt. Immer nur rechte Winkel zu zeigen - das schien ihm starr und einfältig. Deshalb ließ es seine Winkel mal spitz, mal stumpf werden. Um der schönen regelmäßigen Gestalt willen aber ließ es seine Seiten immer gleich lang sein.

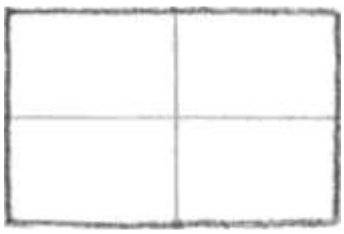


Abb. 19: Das Rechteck

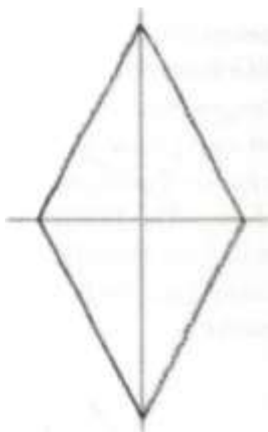


Abb. 20: Die Raute

Die beiden Geschwister taten zwar viel miteinander, aber - wie Geschwister sind - sie neckten sich auch untereinander. Vor allem, wenn sie am anderen Mängel bemerkten, scheuten sie sich nicht, dies auch gleichauszusprechen. Als eines Tages das Rechteck tat, als wäre es der Vater, das Quadrat, lachte die Raute es aus und sagte: «Du willst wie der Vater sein? Der Vater hat aber *vier* Symmetrieachsen, du nur *zwei.* Deine Diagonalen sind keine Symmetrieachsen mehr.» Wer Geschwister kennt, weiß, dass sie sich selten etwas nachzugeben haben. So auch hier. Nach dieser Schmähung besah das Rechteck die Raute etwas genauer und sagte: «Du bist ja auch nicht besser, denn du hast *nur* noch die *Diagonalen* als Symmetrie-achsen.» Da fanden die beiden, dass sie einander ganz gut ergänzten und zusammen gerade die Eigenschaften des Vater hatten.
Eines Tages kam ein Vetter zu Besuch: das *Parallelogramm.* Zwar war wegen der vier Seiten und der vier Ecken die Verwandtschaft nicht zu verkennen, aber von Symmetrieachsen war nichts zu finden; höchstens an seinem Mittelpunkt konnte man es spiegeln oder es um diesen Punkt einmal um 180° herumdrehen. Seine übrigen Eigenschaften schienen den beiden Geschwistern auch nicht sonderlich wünschenswert. Sah es andere, versuchte es gleich, Kontakt zu knüpfen und - was besonders unangenehm war - sich ihnen nach Möglichkeit anzupassen, ihnen sozusagen nach dem Mund zu reden. Auch den beiden Geschwistern schien es sich gleichzeitig anpassen zu wollen: Wie das Rechteck hatte es parallele und gleich lange Gegenseiten (davon rührte sein Name her); wie

bei der Raute waren seine gegenüberliegenden Winkel gleich. So weit war ihm die Anpassung recht gut gelungen, aber im Inneren schien es den beiden bei ihrem Vetter recht verkehrt zuzugehen: Weder die Diagonalen noch die Mittellinien bildeten schöne rechte Winkel, noch waren irgendwie gleiche Winkel zwischen ihnen zu finden. Das Einzige, was man zugestehen konnte, war, dass die Diagonalen und die Mittellinien sich gegenseitig halbierten und durch denselben Punkt gingen. So hatte das Parallelogramm wenigstens einen richtigen Mittelpunkt.

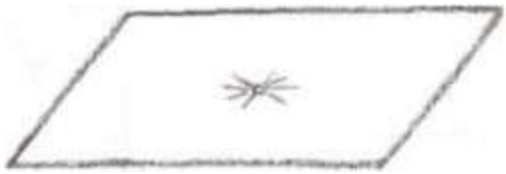


Abb. 21: Das Parallelogramm.

Von zwei sehr merkwürdigen Verwandten zeigte übrigens das Parallelogramm Bilder: Es waren Zwillinge, die durch Zerschneiden eines Parallelogramms in zwei Vierecke entstanden waren. Sie hatten noch ein Paar(gegenüberliegender) paralleler Seiten, aber gar keine Symmetrie. Man nannte sie (allgemeine) *Trapeze*. Unsere - etwas stolzen - Vierecke wollten sie aber wegen der fehlenden Symmetrie noch nicht in ihr *Haus der Vierecke* aufnehmen. Erst im Alter waren sie weniger stolz — aber davonwird noch zu erzählen sein.

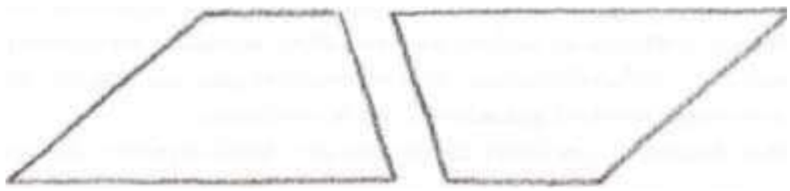


Abb. 22: Allgemeine Trapeze.

Das Leben führte die beiden Geschwister auseinander. Das Rechteck verbrachte viel Zeit am Schreibtisch und ging dadurch unten etwas auseinander. Es wurde zwar zum *gleichschenkligen Trapez* befördert, aber für sein Aussehen bedeutete dies keine Verbesserung. - Die Raute wurde leider etwas aufschneiderisch. Sie versuchte - auch dort, wo es ganz unangemessen war - sich über andere zu erheben und wurde so, was man *überheblich* nennt. Ihr neuer Name - *Deltoid* oder *Rhomboid* – klang zwar sehr vornehm, manche sagten dazu aber auch ganz einfach *Drache.*

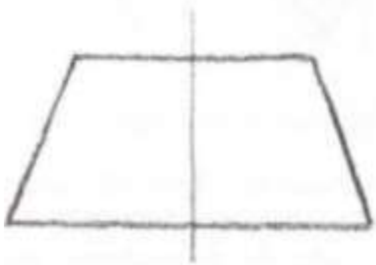


Abb. 23: Das gleichschenklige Trapez.

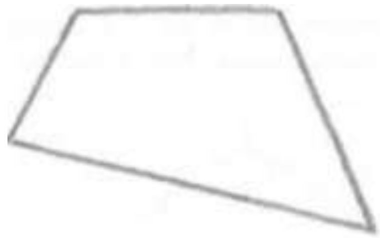
Abb. 24: Deltoid, Rhomboid oder Drache.

Nach vielen Jahren trafen sich die beiden Geschwister bei einem Familien-treffen wieder. So sehr sie sich verbunden fühlten, blieben die Veränderungen des anderen ihren scharfen geschwisterlichen Augen nicht verborgen. «Was ist denn mit dir geschehen?», sagte das Deltoid zum gleichschenkligen Trapez. «Du hast ja nur noch eine einzige Symmetrieachse.» Das gleichschenklige Trapez beruhigte das Deltoid: «Du bist auch nicht schöner geworden.» Denn die Familie maß ihre Schönheit in ihren Symmetrien. So waren sie wieder von ihrem gleichen Wert überzeugt.

Über das Aller ist nur noch wenig zu erzählen. Als sie sich in späten Jahren einmal trafen, sahen sie sich nur noch still an und wussten, dass äußerlich das allgemeine Viereck weder in der einfachen noch in der überschlagenen Form eine Symmetrie besitzt.

Man kann dann den Kindern als Vorblick auf spätere Schuljahre noch das Folgende sagen:

Auf ein Geheimnis möchte ich euch aber noch aufmerksam machen, das wir in der sechsten Klasse genauer besprechen werden. Im Verborgenen sind nämlich auch die allgemeinen Vierecke Quadrate geblieben. Das könnt ihr vielleicht ein wenig verstehen, wenn ich euch zwei Straßenzeichne, die sich in einer weiten, flachen Ebene rechtwinklig schneiden. In der *Perspektive,* die wir in der sechsten Klasse behandeln werden, erscheint ein Quadrat - das Feld der Straßenkreuzung - als ein allgemeines Viereck, und umgekehrt kann man auch das allgemeine Viereck als ein perspektivisches Quadrat verstehen.



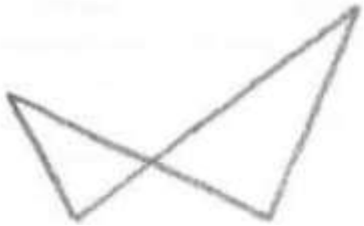


Abb. 25: Das allgemeine Viereck. *Abb. 26: Das allgemeine überschlagene Viereck.*

Ihr seht, die Eigenschaften des Stammvaters sind in einer gewissen Weise immer erhalten geblieben, nur verborgener. Wenn ihr in der Oberstufe seid, dann werdet ihr über die allgemeinen Vierecke noch die schönsten Dinge lernen, und vielleicht findet ihr das perspektivische Quadrat dann sogar schöner und interessanter als das gewöhnliche Quadrat. Seht ihr, so ist es auch manchmal im Menschenleben. Die jungen Menschen sind zum Anschauen am schönsten. Wer alt geworden ist und viel gearbeitet hat, der kann nach außen nicht mehr so schön aussehen wie ein junger Mensch, aber in seinem Inneren, in seiner Seele leben vielleicht eine große Schönheit und ein großer Reichtum durch das Viele, was das Leben ihn gelehrt hat.

Solche Geschichten sind ihrem Inhalt nach vielleicht nicht sehr bedeutsam. Man könnte viele verschiedene Darstellungen wählen, durch welche für die Kinder ein seelischer Bezug zu den verschiedenen Vierecksformen entsteht. Worum es geht, ist, nicht bloß Definitionen zu vermitteln, sondern einen Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Formen so herzustellen, dass in ihren Formen etwas Charakteristisches empfunden werden kann und zugleich ein Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Formen aufleuchtet.

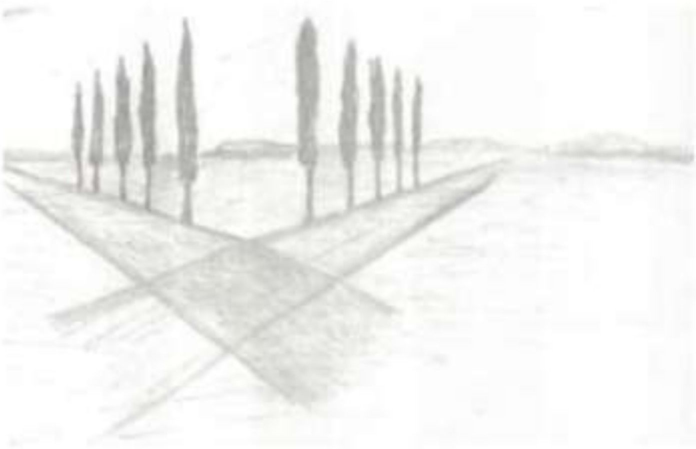


Abb. 27: Jedes allgemeine Viereck ist ein perspektivisch gesehenes Quadrat.

Abschließend kann man die *Familie der Vierecke* und ihre Beziehungen zusammenfassend darstellen. Das Schema wird auch das *Haus der Vierecke* genannt (siehe S. 34).

Hinzuweisen ist noch darauf, dass diese Familie noch andere Verwandte besitzt - wie die Sehnen- und Tangenten-Vierecke, die aber einem anderen Familienzweig angehören. In der siebten oder achten Klasse werden sie auch bekannt gemacht.

Die wichtigsten Eigenschaften der Vierecke

Fortsetzung im Buch…