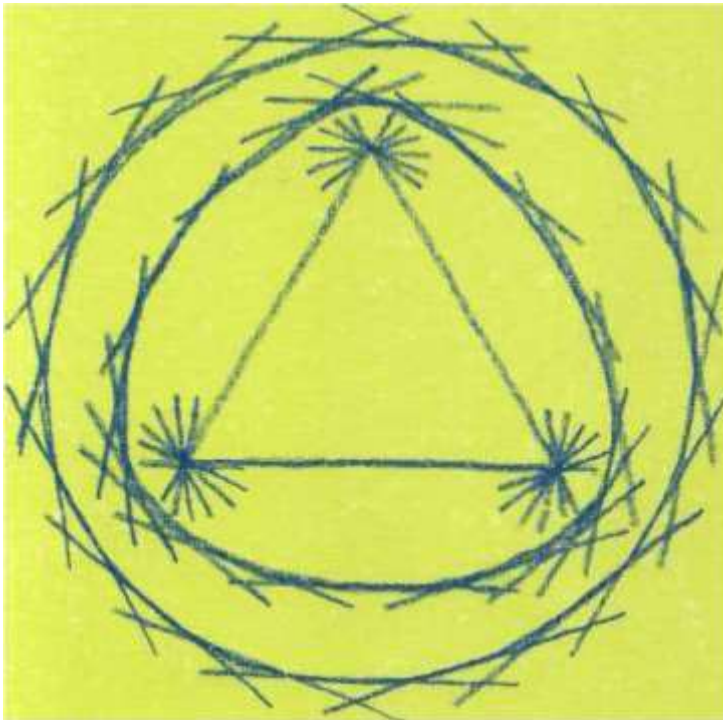


Ernst Schuberth

Der Geometrieunterricht an Waldorfschulen

Band 2:

**Vergleichende Formenlehre und
geometrische Grundkonstruktionen in den
Klassen 4 und 5**



Verlag Freies Geistesleben

Auszug mit Vorwort, Einleitung und Beginn für die 5. Klasse

Inhalt

Vorwort.....	4
Einleitung.....	5
Die vierte Klasse.....	
Hinführung zur Geometrie.....	Fehler! Textmarke nicht definiert.
Vom Kreis zur Ellipse.....	
Winkel- und Längenmessung.....	
Vergleichende Formbetrachtungen.....	
Vom Kreis zum Dreieck.....	
Übungen zum Dreieck.....	
Viereckslehre.....	
Das Haus der Vierecke.....	
Die wichtigsten Eigenschaften der Vierecke.....	
Aufgaben zu den Vierecken.....	
Licht- und Schattenräume um eine Kugel.....	
Die fünfte Klasse.....	6
Der Kreis.....	6
Der Kreis als Brandungslinie.....	6
Gerade und Punkt als Grenzvorstellungen eines Kreises.....	7
Punkte und Geraden im Verhältnis zum Kreis.....	8
<i>Symmetrien am Kreis</i>	11
Übungen zur Freihandgeometrie.....	12
Die Einführung von Zirkel und Lineal.....	15
Bezeichnungen.....	15
Geraden- und Kreisübungen.....	16
Zeichenübungen mit Zirkel und Lineal.....	16
Die geometrischen Grundkonstruktionen.....	18
Methodisches.....	18
1. Grundkonstruktion: Die Mittelsenkrechte.....	18
Hinführung zur Fragestellung:.....	18
Herausarbeiten des mathematischen Problems:.....	
Die Lösung:.....	
Konstruktionsbeschreibung:.....	
Die Begründung der Konstruktion:.....	
Vereinfachte Konstruktion:.....	
Die Ganzheit und der Übergang zu neuen Fragen:.....	
Aufgaben zur Mittelsenkrechten.....	
2. Grundkonstruktion: Das Halbieren einer Strecke.....	
Aufgaben zum Halbieren einer Strecke.....	
3. Grundkonstruktion: Das Errichten der Senkrechten in einem Punkt einer Geraden.....	
Aufgaben zur Senkrechten.....	
Der Gebrauch des Geodreiecks.....	
4. Grundkonstruktion: Das Fällen eines Lotes.....	
Aufgaben zum Lot.....	
5. Grundkonstruktion: Das Halbieren eines Winkels.....	
Aufgaben zum Halbieren eines Winkels.....	
6. Grundkonstruktion: Das Übertragen einer Strecke.....	

7. Grundkonstruktion: Das Übertragen eines Winkels	
8. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt.....	
Aufgaben zur Konstruktion von Parallelen	
9. Grundkonstruktion: Die Konstruktion der Mittelparallele zu zwei parallelen Geraden.....	
Aufgaben zur Mittelparallele	
Winkel an Parallelen.....	
Abschließende Übungen.....	
Die erste Begegnung mit dem pythagoreischen Lehrsatz.....	
Rückblick und Ausblick	
Anmerkungen	
Register.....	

Vorwort

Dieses Buch ist Teil einer mehrbändigen Gesamtdarstellung des Geometrieunterrichts in den Klassen 1 bis 8 an Waldorfschulen. Entsprechend den menschenkundlichen Entwicklungsgesetzen werden drei Stufen betrachtet: Die erste umfasst etwa die Klassen 1 bis 3, die zweite die Klassen 4 und 5 und die dritte die Klassen 6 bis 8. E. A. K. Stockmeyer hat in seiner Zusammenstellung der Lehrplanangaben Rudolf Steiners als Erster auf die Spiegelung dieser Entwicklungsstufen im Geometrieunterricht aufmerksam gemacht.¹ Auf der ersten Stufe, im *Formenzeichnen*, wird die Geometrie als *tätige Geometrie* gepflegt. Das Kind lernt Formen vielfältig erfassen und erzeugen. Es schult seine Feinmotorik und entwickelt ein Gefühl für die Sprache der Formen, ein *Formenfühlen*. Auf der zweiten Stufe treten die *Beziehungen der Formen zueinander* in den Vordergrund. Stockmeyer nennt dies eine *vergleichende Geometrie*. Auf der dritten Stufe beginnt, was wir gewöhnlich als Geometrie bezeichnen: die beweisende *Geometrie*.

Mit dieser mehrteiligen Darstellung der verschiedenen Stufen wird der Versuch unternommen, Inhalt und Zusammenhang der einzelnen Stufen in einem möglichen Aufbau darzustellen. Wie ich schon in anderen meiner Bücher betont habe, betrachte ich den Aufbau als *Anregung* für den selbständig arbeitenden Lehrer. Es widerspräche dem Selbstverständnis der Waldorfschulbewegung, wenn ein möglicher Weg dogmatisch vertreten würde. Vielmehr erhoffe ich, dass diese Darstellung eines Tages eine Weiterentwicklung durch Kolleginnen und Kollegen findet, die von ihren Erfahrungen berichten und Anregungen vermitteln.

Die Gefahr einer kanonischen Festschreibung ist glücklicherweise - außer durch das naturgemäße Unabhängigkeitsbedürfnis der Waldorflehrerinnen und -lehrer - dadurch gemildert, dass zum Geometrieunterricht eine Vielfalt unterschiedlicher und anregender Darstellungen schon vorliegt. Neben den wunderbaren alten Darstellungen von Hermann von Baravalle und von Alexander Strakosch möchte ich vor allem auf die Bücher des erfahrenen Kollegen Arnold Bernhard hinweisen, die sich für viele Kolleginnen und Kollegen als hilfreich erwiesen haben.²

Unbedingt zu erwähnen habe ich das Buch von Arnold Wyss, Ernst Bühler, Fritz Liechti und Rene Perrin, *Lebendiges Denken durch Geometrie*, das seinem Inhalt nach dieser Darstellung am nächsten kommt. Darin sind viele Anregungen für den Unterricht zu finden, die in einer Waldorfschule in der vierten und fünften Klasse Platz finden können. Deshalb möchte ich das Studium der entsprechenden Teile jenes Buches besonders empfehlen.

Zu danken habe ich vielen Kolleginnen und Kollegen, deren Arbeit ich bei unterschiedlichen Gelegenheiten kürzer oder länger begegnen konnte, den Kindern, mit denen ich arbeiten durfte, aber auch den Freunden in der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum, durch deren jahrelange Zusammenarbeit spirituelle Gesichtspunkte für ein Verständnis der Mathematik gewonnen werden konnten. Mein Dank gilt auch Frau Monika Feles-Baumann, die das Manuskript zu großen Teilen abschrieb.

Mannheim, Freie Hochschule für anthroposophische Pädagogik, im Winter 1997

Ernst Schubert

Einleitung

Etwa im zehnten Lebensjahr durchlebt das Kind einen seelischen Wandel, der ihn in ein neues, bewussteres Verhältnis zur Umwelt setzt.³ Der Lehrplan der Waldorfschulen antwortet auf diese Veränderungen unter anderem dadurch, dass eine erste Ordnung der Tiere, dann der Pflanzen und - im sechsten Schuljahr - der Mineralien besprochen wird. Für das Tier- und Pflanzenreich lässt sich eine Ordnung altersgemäß finden, in-dem die Tiere auf den Leib und die Pflanzen auf das Seelenleben des Menschen vergleichend bezogen werden.⁴

In der Geometrie kann in methodisch ähnlicher Weise eine vergleichende Beschreibung der einfachsten geometrischen Formen - wie des Kreises, der Dreiecke und Vierecke - einsetzen. Das Kind lernt dabei, die einzelnen Formen bewusster anzuschauen, unterschiedliche Formen zu benennen und einzelne Bestimmungsstücke zu unterscheiden. Dabei wird nichtschlussfolgernd das eine aus dem anderen hergeleitet, wie es vom sechsten Schuljahr an angemessen ist, sondern es werden *vergleichend* die Formen in Beziehungen zueinander gesetzt.

Der im Folgenden vorgeschlagene Aufbau kann selbstverständlich nur als *ein* möglicher Weg betrachtet werden. Andere Inhalte statt der behandelten sind durchaus denkbar. Bei der vergleichenden Formenlehre war es mein Anliegen, von den möglichst vollkommenen Formen (Kreis, Quadrat, gleichseitiges Dreieck) auszugehen und aus ihnen die abgeleiteten, weniger symmetrischen Formen hervorgehen zu lassen. Ich sehe dies in Entsprechung dazu, dass in der Naturkunde zuerst der Mensch behandelt wird, der als eine Art Urbild die einzelnen Naturformen umschließt.

Vorgeschlagen wird auch, die elementaren Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal gegen Ende der fünften Klasse auszuführen. Immer wieder habe ich erlebt, mit welcher Begeisterung die Kinder in diesem Übergang vom Formenzeichnen und der Freihandgeometrie zu beschreibbaren Konstruktionsverfahren vollziehen. Damit wird auch die Möglichkeit geschaffen, in der sechsten Klasse tatsächlich mit der beweisenden Geometrie einzusetzen.

Ein weiteres Anliegen des folgenden Aufbaues ist die Entwicklung von *Raumvorstellungen* beim Kind. Hat es in den ersten Schuljahren noch vorwiegend ein flächenhaftes Vorstellen,⁵ so beginnt es nach dem Entwicklungseinschnitt im zehnten Lebensjahr deutlicher innerlich die dritte Dimension zu erfassen. Auch wenn eine räumliche Geometrie - außeervielleicht in der Behandlung der regulären Polyeder und einfacher Volumenberechnungen - der Oberstufe vorbehalten bleiben muss, kann doch gerade eine einfache Betrachtung von Licht- und Schattenverhältnissen viel zur Entwicklung von Raumvorstellungen beitragen.⁶ Eine Anregung dafür ist hier nur beispielhaft angedeutet. Ähnliche Betrachtungen können in den Geometrieunterricht oder auch in andere Epochen so eingeflochten werden, wie die Gelegenheit es ergibt. In den Darstellungen für die dritte Stufe (Klasse 6 bis 8) wird manches davon noch genauer ausgeführt.

Ein Wort noch zu den Zeichnungen: Die Freihandzeichnungen sind zum großen Teil zunächst mit Bleistift skizziert und dann mit einem kräftigen Stift nachgezeichnet worden. In anderen Fällen wurde aber mit Zirkel und Lineal konstruiert, damit die gemehrte Gesetzmäßigkeit deutlich wurde, der man auch im reinen Freihandzeichnen möglichst nahekommen sollte. Um den Charakter einer freien Zeichnung anzudeuten, wurde dann die Konstruktion mit Buntstift nachgezeichnet. Einzelne Zeichnungen, die doch als Freihandzeichnungen gedacht sind, wurden erkennbar als Zeichnungen mit Zirkel und Lineal belassen. Sie sind nur zur Orientierung, nicht als Vorbild gedacht.

Die Lehrerinnen und Lehrer werden immer bedenken müssen, dass eine Tafelzeichnung ganz andere Geschicklichkeiten erfordert als eine kleine Zeichnung auf dem Papier. Sie werden also in jedem Fall einige Zeit vorher mit Übungen an der Tafel beginnen müssen. Dies gilt sowohl für Freihand- wie für konstruierte Zeichnungen. Für die Kinder ist von wesentlicher Bedeutung, wie der Lehrer oder die Lehrerin zeichnen. Die tatsächlichen Bewegungsabläufe - ob die Hand ruhig oder nervös, mit starkem oder schwachem Druck usw. geführt wird - sind ein wesentlicher Eindruck, den die Kinder aufnehmen und der ihr Verhältnis zum behandelten Inhalt mitbestimmt!

Ratsam und hilfreich ist es bei schwierigen Freihandzeichnungen, sich mit einer leichten Skizze die Position und wichtige Punkte festzulegen. Von einer guten Vorbereitung hängt der Erfolg ab. Strahlen von der Lehrerin oder dem Lehrer Vertrauen in die Fähigkeiten der Kinder aus und leiten sie sie ruhig und überschaubar an, dann können die Kinder Erstaunliches leisten. Dass dabei die Freihandzeichnungen im Allgemeinen nicht die Genauigkeit einer Konstruktion haben können, ist selbstverständlich. Dafür schult aber das Kind daran unmittelbar seine eigene Konstitution - die Koordination von Auge und Hand, die Feinmotorik und manches andere.

Ein wesentliches Handicap für die gedruckten Zeichnungen ist der Mangel an Farbe. In Kursen bemühe ich mich nach Möglichkeit, Farbensinnvoll zur Hervorhebung geometrischer Strukturen oder überhaupt um der Schönheit willen einzusetzen. Aus finanziellen Gründen ist das hier nicht möglich. Im Unterricht sollte aber die Belebung durch die Farbe nicht fehlen. Zu vermeiden ist allerdings ein sinnloses Buntmachen oder ein Verziern mit Blümchen und Ähnlichem. Die Schönheit geometrischer Zeichnungen liegt wesentlich in der inneren Gesetzmäßigkeit, die sie offenbaren und die meistens viel tiefer reicht, als sie auf dieser Stufe überschaut werden kann. Indem das Kind sich tätig und vergleichend betrachtend in die geometrische Formenwelt einlebt, gewinnt es zu ihr diejenige Beziehung, die später Erkenntnisfragen in der Seele aufsteigen lässt und damit zur eigentlichen mathematischen Betrachtungsweise hinführt.

Die fünfte Klasse

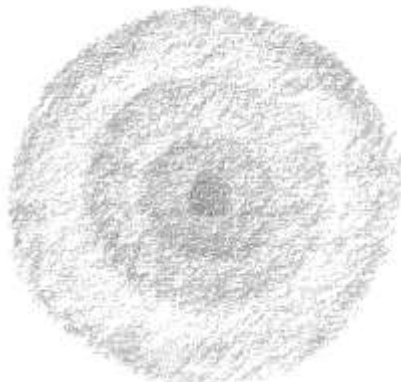
Ähnlich wie in der vierten Klasse ist die Geometrie der fünften Klasse, sofern sie noch Freihandgeometrie ist, als Teil des Formenzeichnens zu betrachten. Der hier vorgeschlagene konstruktive Teil gehört aber schon in engerem Sinne dem Mathematikunterricht an.

Die weiter unten folgenden geometrischen Ausführungen zur Symmetrie sind - wenigstens zum Teil - als begleitende Besprechungen zu den Freihandübungen zu verstehen. Der Arbeitsteil des Hauptunterrichts kann mit den Betrachtungen zum Kreis und zur Symmetrie eingeleitet werden. Dann können täglich die Freihandübungen einsetzen, zu denen im Anschluss einige Anregungen gegeben werden. Zunächst soll aber der Kreis noch einmal unter einem neuen Aspekt gezeichnet und besprochen werden.

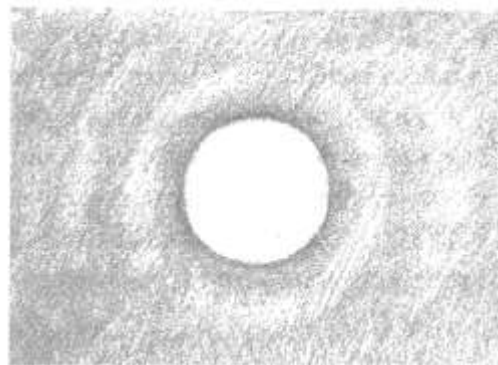
Der Kreis

Der Kreis als Brandungslinie

Wie in der vierten Klasse kann man wieder von der Kreisform ausgehen. Diesmal soll sie aber durch einen Prozess entstehen. Wir denken uns eine Quelle, aus der wir - zum Beispiel mit gelber Farbe - eine kleine Kreisfläche hervorgehen lassen. In eurer zweiten Zeichnung lassen wir - zum Beispiel mit blauer Farbe - vom Umkreis her ebenfalls eine Kreisform so entstehen, dass sie umhüllt wird. Die Kinder sollen nun abwechselnd mit Gelb und Blau an beiden Zeichnungen so schraffieren, dass die gelbe Fläche, immer eine Kreisform *erfüllend*, nach außen wächst, während die blaue Fläche, von außen *umhüllend*, sich zur Mitte hin verengt. Sie umschließt eine Kreisform.



*Kreisfläche sich weitend
Kreis-Inneres
Erfüllend die Form*



*Kreisfläche umschließend
Kreis-Äußeres
Umhüllend die Form*

Abb. 42 und 43: Kreis-Inneres und Kreis-Äußeres

In einer dritten Zeichnung lassen wir nun beide Prozesse gleichzeitig ablaufen: Mit Gelb lassen die Kinder eine wachsende Kreisfläche entstehen, mit Blau vom Umkreis her eine Kreishülle. Wo die beiden Strömungen sich begegnen, entsteht die Kreislinie. Man kann dabei etwa an Wasserströmungen denken, die gegeneinander laufen, wie es bei Sturm vor der Küste geschieht. Die *Brandungslinie* entsteht aus dem Zusammenprall des auflaufenden und des ablaufenden Wassers. So wird hier die Kreisform mit dynamischen Vorstellungen durchdrungen. Sie entsteht als Ergebnis *dynamischer Vorgänge*, als Brandungslinie der beiden *Strömungen*. Sie hat nicht in gleicher Weise ein Sein wie die Flächen. Ihr Sein ist in einem *Prozess* konstituiert.

Auch an den beiden einfarbigen Zeichnungen können zwei Bewegungen besprochen werden. Das Gelb kann sich weiten und zusammenziehen, verströmen und konzentrieren. Die Bewegungsgesten sind Dehnen und Verdichten. Die blaue Hülle kann enger umschließen und sich weiten. Die Bewegungsgesten sind Umschließen und Weiten.²¹

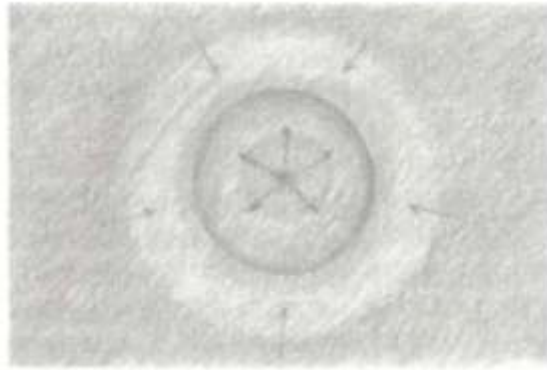


Abb. 44: Kreis-Inneres und Kreis-Äußeres treffen in der Kreislinie zusammen.

Gerade und Punkt als Grenzvorstellungen eines Kreises

In der vierten Klasse hatten wir verschiedene Formen (Ellipse, Dreieck, Quadrat) aus dem Kreis entstehen lassen. Dabei hatten wir auf zwei Bewegungsarten (Fortschreiten = Ortsänderung und Drehen = Richtungsänderung) hingewiesen. Die Kreislinie war dabei schon als Punkt- und als Strahlenmenge aufgetreten.²²

Daran können wir in der fünften Klasse wieder anknüpfen. Wir machen darauf aufmerksam, dass der Kreis viele Orte (- Punkte) besitzt, die man durchlaufen kann, und ebenso viele Richtungen, welche durch die Geraden angedeutet werden, die den Kreis als *Tangenten* umhüllen (Abb. 45). Indem wir wieder ein Kind die Kreisform vor der Klasselaufen lassen und die vollzogene Bewegung an der Tafel darstellen, schließen wir an die Inhalte der vierten Klasse an. Ist dies geschehen, lassen wir nun den Kreis, den das Kind läuft, immer kleiner und kleiner werden, bis er zu einem Punkt geschrumpft ist. Dann bleibt als Bewegung nur noch das Drehen in diesem Punkt übrig. Es ist ein *Strahlenbüschel* entstanden. Dieses besteht aus einem Punkt und allen durch ihn gehenden Geraden. Die Geraden können sich in dem Punkt in zweierlei Sinn drehen: im Uhrzeigersinn und im entgegengesetzten Sinn (Abb. 46).

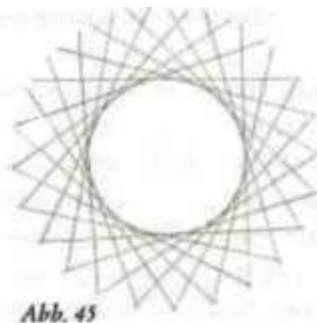


Abb. 45

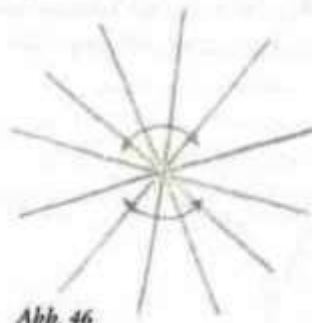


Abb. 46



Abb. 47

Abb. 45 bis 47: Der Kreis mit seinen Tangenten kann mm Strahlenbüschel und zur Punktreihe entarten.

Nun lassen wir den Kreis wieder wachsen. Das Strahlenbüschel *plustert sich* sozusagen *auf*. Wird der Kreis größer und größer, so tritt beim Durchlaufen das Fortschreiten immer mehr in den Vordergrund, und das Drehen tritt zurück. Schließlich wird der Kreis so groß, dass er nicht mehr in der Klasse gelaufen und auch nicht auf der Tafel

gezeichnet werden kann. In der Vorstellung entwickeln wir das Vergrößern des Kreises mit den Kindern aber weiter und rufen als *Grenzvorstellung* die Vergrößerung des Kreises bis ins Unendliche hervor. Von den beiden Bewegungen bleibt jetzt nur das Fortschreiten auf der einzig verbliebenen Geraden übrig (Abb. 47). Eine Gerade mit ihren Punkten wird eine *Punktreihe* genannt.²³ Soweit es möglich ist, bespricht man mit den Kindern die beiden Grenzformen des Kreises - das Strahlenbüschel und die Punktreihe - in ihrer Polarität.

Punkt-Inneres und Geraden-Äußeres (Kern und Hülle des Kreises)

Sollen in einfachster Weise Inneres und Äußeres des Kreises zu Punkten und Geraden in Beziehung gesetzt werden, so kann man bedenken, dass jeder Punkt zunächst endlich erscheint. Punkthaft haben wir deshalb beider gelben Kreisfläche aus der Quelle das Innere sich weiten lassen. Jede Gerade ist in sich schon unendlich. Geraden können *umhüllend* die Kreisform umschließen, die von den Punkten *erfüllend* gebildet wird. Die Gesamtheit der Geraden im Äußeren des Kreises nennen die Mathematiker eine *Hülle* (Abb. 48), das von Punkten gebildete Innere einen *Kern* (Abb. 49). Ihn bezeichnet man gewöhnlich als die *Kreisfläche*.

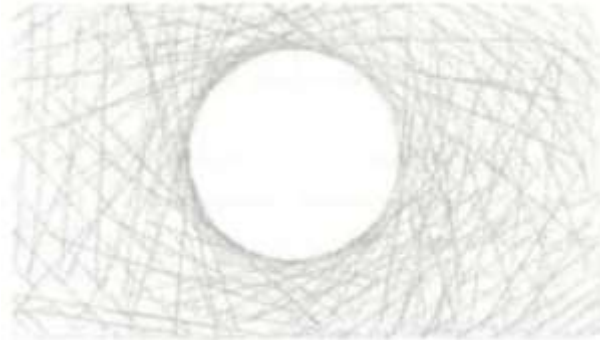


Abb. 48: Kreis - Äußeres - Hülle.



Abb. 49: Kreis - Inneres - Kern.

Punkte und Geraden im Verhältnis zum Kreis

Im Sinne der vorausgegangenen Betrachtungen können wir die Kinder auf das *polare* Verhältnis der Punkte und der Geraden zum Kreis hinweisen. Das Wort «polar» drückt aus, dass sich etwas entgegengesetzt, aber doch aufeinander bezogen verhält - so wie man es im einfachsten Fall an Nord- und Südpol eines Magneten beobachten kann. Man kann den Kindern sagen, dass man diese polaren Verhältnisse noch ein Stück weiter verfolgen wird, dass die Kinder aber erst in der Oberstufe - in der zehnten oder elften Klasse - all dies viel genauer lernen werden.

Ein besonderer Punkt im Kreis ist der *Mittelpunkt*. Die Geraden durch den Mittelpunkt nennt man *Zentralen*. Sie schneiden den Kreis in genau gegenüberliegenden Punkten. Die Strecke zwischen solchen gegenüberliegenden Punkten nennt man einen *Durchmesser* des Kreises. Der halbe Durchmesser, also die Strecke vom Mittelpunkt bis zu einem Kreispunkt, nennt man den *Radius*.



Abb. 50a - c: Zentrale, Durchmesser und Radius am Kreis

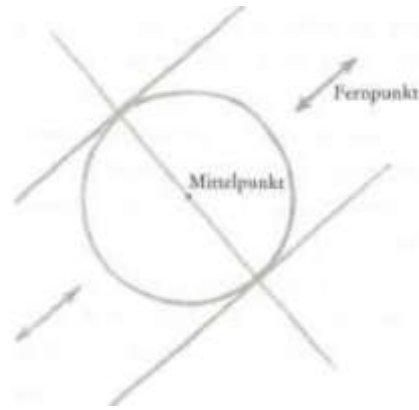


Abb. 51: Die Beziehung des Mittelpunktes zum Unendlichen

Betrachtet man eine Zentrale und die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis, so sind diese Tangenten *parallel*. Sie weisen hinaus ins Unendliche. So steht der Mittelpunkt des Kreises in einer Beziehung zum Unendlichen, aus welchem die Kreishülle, die wir am Anfang blau zeichneten, hervorging und sich zur Mitte hin ausweitete. Dem Kreismittelpunkt mit allen seinen Zentralen entspricht das Unendliche in allen Richtungen.²⁴

Wenn nun aus dem Unendlichen eine Gerade allmählich an die Kreislinie herankommt, können wir verschiedene Lagen im Verhältnis zum Kreis beschreiben. Solange eine Gerade den Kreis nicht trifft oder berührt, nennt man sie eine *Passante*. Berührt sie den Kreis, so wird sie zur *Tangente*. Schneidet sie den Kreis in zwei Punkten, so nennt man sie eine *Sekante*. Geht sie durch den Mittelpunkt, so heißt sie - wie schon erwähnt - *Zentrale*. Das Verhältnis der Geraden zum Kreis wird also im Wesentlichen durch die Zahl ihrer Kreispunkte bestimmt. - Hier sollte auch die *Sehne* genannt werden: Sie ist die Strecke einer Sekante, welche durch die Kreisschnittpunkte bestimmt wird.

Entsprechend kann man die Punkte unterscheiden, nun aber danach, wie viele Geraden sie mit dem Kreis gemeinsam haben (s. Abb. 52a - h). Die folgenden Bezeichnungen sind zwar bis auf den Berührungspunkt nicht üblich, entsprechen aber genau der Unterscheidung der verschiedenen Lagen von Geraden. Ein Punkt im Kreisinneeren hat keine Tangenten mit dem Kreis gemeinsam. Er entspricht der Passante, die keine Punkte mit dem Kreis gemeinsam hat. Man könnte ihn *Meidepunkt* nennen. Rückt nun der Punkt nach außen, so kommt er auf die Kreislinie zu liegen und hat eine Gerade mit dem Kreis gemeinsam, die Tangente. Man nennt ihn dann *Berührungspunkt*. Der Sekante mit ihren zwei Kreispunkten entspricht ein Punkt im Kreisäußeren, der nun zwei Geraden (Tangenten) mit dem Kreis gemeinsam hat. Man könnte ihn einen *Verbindungspunkt* nennen. Der Zentralen würde ein Punkt entsprechen, der unendlich fern ist und zwei gegenüberliegende Tangenten an den Kreis sendet, so wie die Zentrale zwei gegenüberliegende Kreispunkte besitzt. Man kann ihn einen *Fernpunkt* nennen.

Ich halte es nicht für notwendig, diese - im Folgenden auch nicht alle gebrauchten - Bezeichnungen einzuführen. Auf den Sachverhalt der polaren Verhältnisse von Geraden und Punkten am Kreis sollte aber hingewiesen werden.

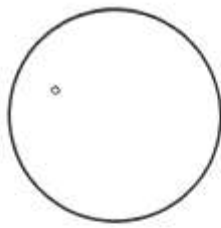


Abb. 52a: Meidepunkt

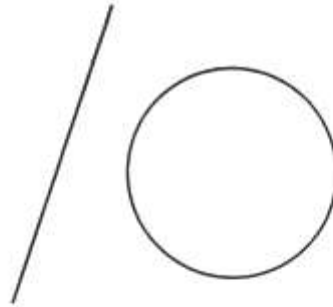


Abb. 52b: Passante

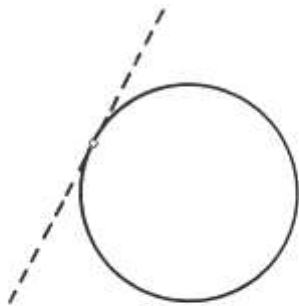


Abb. 52c: Berührungspunkt



Abb. 52d: Tangente

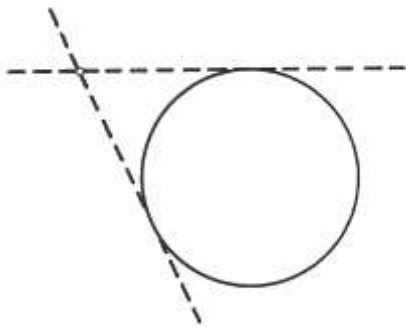


Abb. 52e: Verbindungspunkt

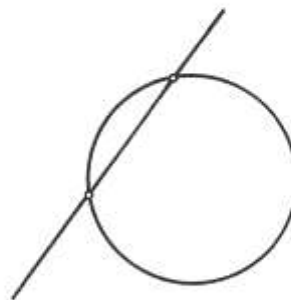


Abb. 52f: Sekante

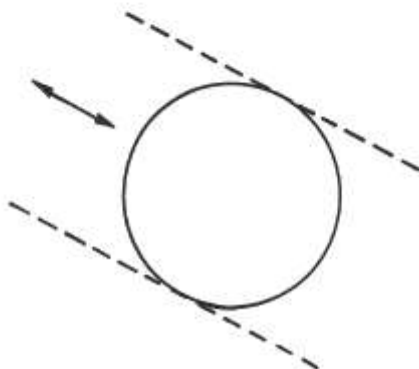


Abb. 52g: Fernpunkt

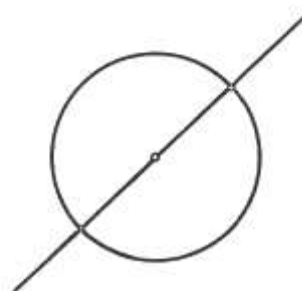


Abb. 52h: Zentrale

Abb. 52a – h: Punkte und Geraden im Verhältnis zum Kreis.

Symmetrien am Kreis

Durch eine Vielzahl von Symmetrieübungen im Formenzeichnen sind die Kinder seit langem mit der Achsensymmetrie vertraut. Angesichts der Bedeutung des Symmetriebegriffs für den Aufbau der Geometrie kann hier - ohne in eine zu frühe und formale Systematik zu verfallen - speziell auf Symmetrieverhältnisse am Kreis und mit ihnen zusammenhängende einfache Figuren aufmerksam gemacht werden. Dazu kann man eines Tages noch einmal über die (Achsen-)Symmetrie sprechen und vielleicht zunächst an einer einfachen Figur die Symmetrieachsen bestimmen lassen. Beim Besprechen der Vierecke waren zum Beispiel die Symmetrieachsen zur Ordnung im Haus der Vierecke herangezogen worden. Die eine oder andere Figur könnte daraus erinnert werden. Dann kann man die Kinder nach den Symmetrieachsen eines Kreises fragen. Das Ergebnis wird wohl sehr rasch gefunden: Alle Zentralen – und nur diese - sind Symmetrieachsen (Abb. 53).

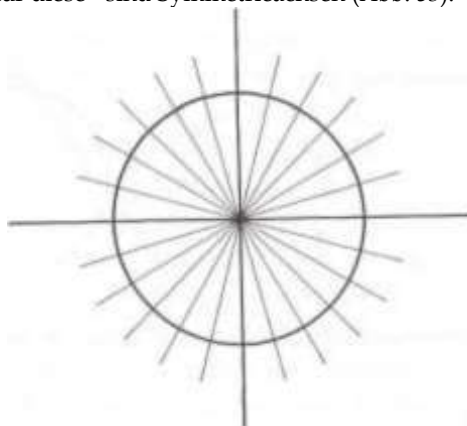


Abb. 53: Alle Zentralen und keine anderen Geraden sind Symmetrieachsen des Kreises.

Nun lassen wir sozusagen aus dem ersten Kreis einen zweiten – gleich großen - hervorgehen, dessen Mittelpunkt ein wenig horizontal gegen den ersten Mittelpunkt verschoben ist (Abb. 54a). Diese neue Figur aus zwei Kreisen hat nur noch *zwei* Symmetrieachsen: die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte und die Verbindungsgerade der beiden Kreisschnittpunkte. Die beiden Symmetrieachsen verlaufen senkrecht zueinander. Man kann diese Verhältnisse auch so aussprechen: Die genannten Punkte bilden eine Raute, in der die Diagonalen geraden Symmetrieachsen sind.

Rücken nun die Kreismittelpunkte weiter auseinander, so tritt der Fall ein, dass sich die beiden Kreise *berühren* (Abb. 54b). Die eine Symmetrieachse ist dann die gemeinsame Tangente. Rücken die beiden Kreismittelpunkte noch weiter auseinander, so verläuft die zweite Achse senkrecht zur Verbindungsgeraden der Kreismittelpunkte - mitten zwischen den Kreismittelpunkten (Abb. 54c).

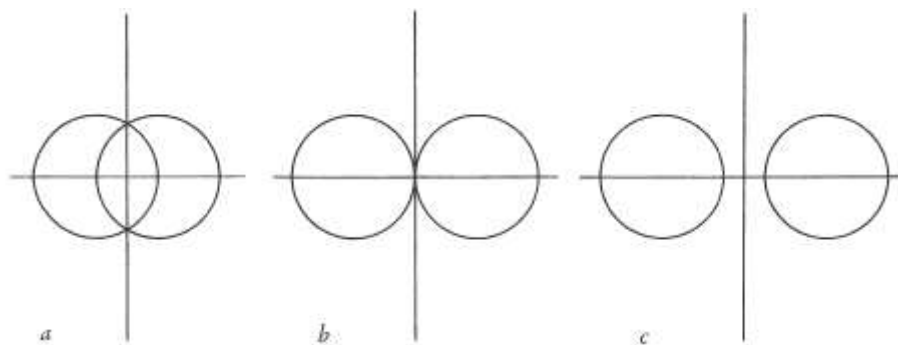


Abb. 54a-c: Die Symmetrieachsen von zwei Kreisen mit gleichem Radius

Nun können wir die Figur noch in anderer Art variieren, indem wir die Kreise immer kleiner werden lassen (Abb. 55a - c), bis sie schließlich zu Punkten schrumpfen: Auch die sehr einfache Figur aus nur zwei Punkten hat zwei Symmetrieachsen (Abb. 55c).

In einer weiteren Variation lassen wir die Kreise immer weiter wachsen, bis sie schließlich zu Geraden werden (Abb. 55d - e).²⁵ Sind sie parallel (Abb. 55e), tritt der interessante Fall ein, dass wieder sehr viele Symmetrieachsen zu finden sind; und zwar sind auch alle Geraden, die *parallel* zur ursprünglichen Verbindungsgeraden der Mittelpunkte verlaufen, Symmetrieachsen geworden. Die ursprünglich zweite Symmetrieachse ist nun *Mittelparallele*.

Schneiden sich aber die beiden Geraden, so gibt es nur zwei Symmetrieachsen der Figur (Abb. 55f). Die Verwandlung der Figur kann noch in interessanter Weise weitergeführt werden, indem wir nun die Kreisradien *verschieden* werden lassen (Abb. 56b - c, bzw. 56d - e). Dann ist die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte die einzige Symmetrieachse.

Wieder lässt sich die Figur variieren und bis zu Grenzvorstellungen hinführen, wo nur noch Punkte und Geraden auftreten (Abb. 56f). So hat die Figur aus einem Punkt und einer Geraden - wenn der Punkt nicht auf der Geraden liegt - genau eine Symmetrieachse. Besonders erwähnt werden sollte auch der Fall eines Kreises und einer ihn schneidenden Geraden (einer Sekante). Die Symmetrieachse verläuft senkrecht zur zugehörigen Sehne und halbiert sie (Abb. 56g).

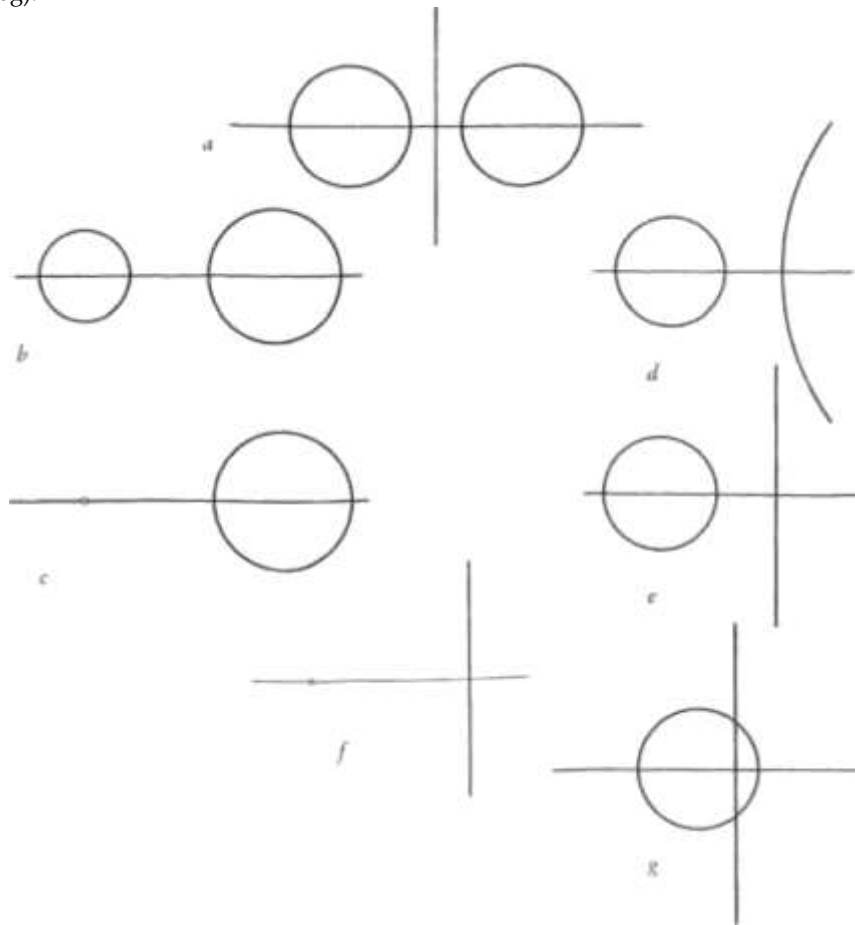


Abb. 56a - g: Die Symmetrie bei zwei Kreisen mit unterschiedlichem Radius und Grenzfälle

Übungen zur Freihandgeometrie

Die vorangehenden Besprechungen über den Kreis sollten von freihandgeometrischen Übungen begleitet werden. Manche der Übungen sind vielleicht schon in den vorangehenden Jahren behandelt worden. Sie können aber immer wieder neu beleuchtet werden und zeigen in der zunehmenden Vollkommenheit auch etwas vom Fortschritt der Kinder. Jetzt werden solche Übungen vorgeschlagen, die auch dann als konstruktive Übungen angewandt werden können, wenn Zirkel und Lineal eingeführt worden sind. Dadurch erscheinen sowohl die Fähigkeiten der Hand wie die Genauigkeit der Instrumente in wechselseitiger Beleuchtung.

1. Der Kreis (Abb. 57).
2. Konzentrische Kreisscharen von innen nach außen oder von außennach innen entstehend (Abb. 58).
3. Die Keimübung (Abb. 59).
4. Ausgleich zwischen Punkt und Gerade durch eine Kreisschar (Abb. 60).
5. Dreiecke im Kreis (zum Üben von beweglichen Vorstellungen und vergleichenden Beschreibungen) (Abb. 61a- b).
6. Die Kreisrosette (Abb. 62).
7. Fünfstern im Fünfeck (Abb. 63).
8. Ineinander geschachtelte Quadrate (Abb. 64).

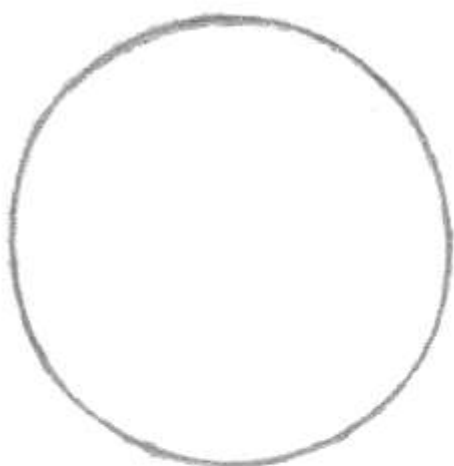


Abb. 57



Abb. 58

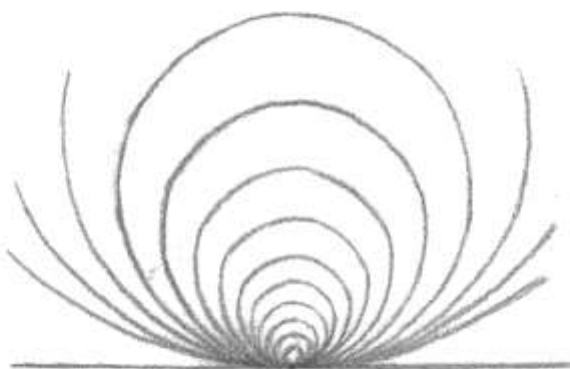


Abb. 59

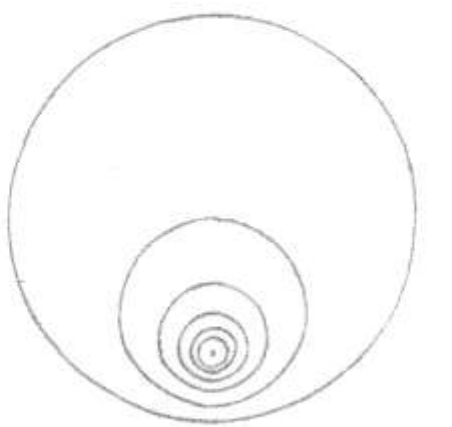


Abb. 60

Abb. 57 – 60: Übungen zur Freihandgeometrie.

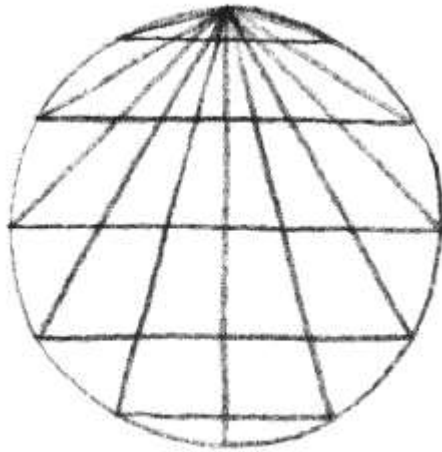


Abb. 61a

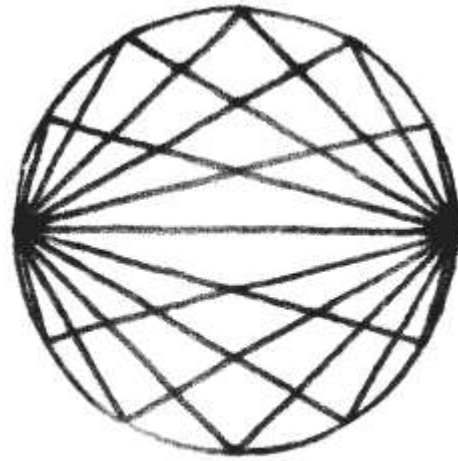


Abb. 61b

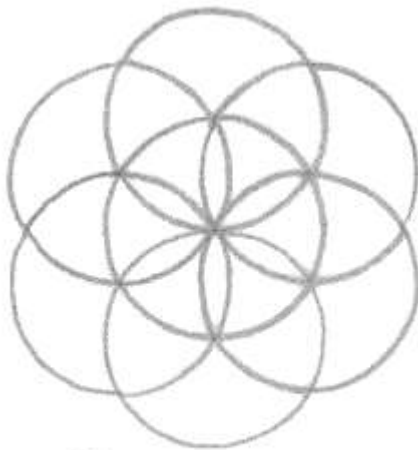


Abb. 62

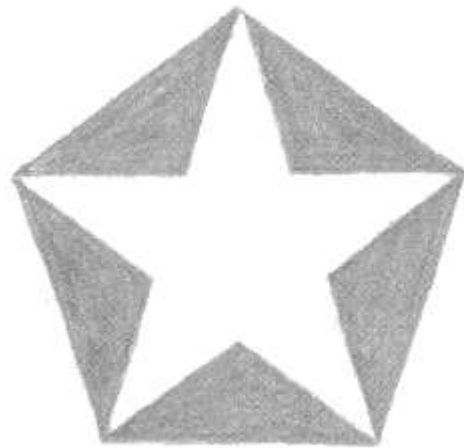


Abb. 63

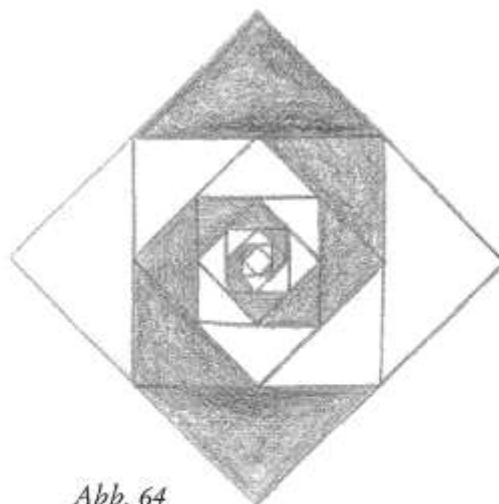


Abb. 64

Abb. 61 – 64: Übungen zur Freihandgeometrie.

Die Einführung von Zirkel und Lineal

Mit der Einführung von Zirkel und Lineal werden nicht nur Werkzeuge für ein genaueres Zeichnen zur Verfügung gestellt, sondern sie sind zugleich der Ausdruck bestimmter Begriffe und Begriffszusammenhänge, die zu ganz neuen Aufgaben und Fragestellungen führen. Für die Freihandgeometrie hat es zum Beispiel keinen Sinn, nach der Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke zu fragen. Werden, wie in der Übung der ineinander geschachtelten Quadrate, Seitenmitten bestimmt, so findet dabei eine Sinnes- und Koordinationsschulung statt. Stehen dagegen Zirkel und Lineal zur Verfügung, so sind durch die Werkzeuge bestimmte Handlungsmöglichkeiten vorgegeben, deren Anwendung begrifflich beschrieben und gedanklich begründet werden kann. Die motorische Schulung in der Anwendung der Instrumente beginnt sich vom mathematischen *Inhalt* abzulösen, wie es dann bei der Verwendung eines Geometrieprogramms im Computer zu einem extremen Auseinanderfallen von motorischer Aktivität und dargestelltem Inhalt auf dem Bildschirm kommen kann.

Die Einführung der geometrischen Instrumente sollte langfristig auf einem Elternabend vorbereitet werden. Dort ist zu erfragen, in welchen Elternhäusern geeignete Zirkel und Zeichengeräte zur Verfügung stehen. Diese Geräte sollten namentlich gekennzeichnet in die Schule mitgebracht werden, damit ihre Verwendbarkeit rechtzeitig vom Lehrer überprüft werden kann. Wo Neubestellungen notwendig sind, empfiehlt sich eine einheitliche Anschaffung durch den Lehrer. Für Deutschland kann als Standard gelten, dass beide Zirkelschenkel miteinander so verbunden sind, dass sie sich nur gleichzeitig bewegen lassen. Für größere Zeichnungen ist es nützlich, Zirkel mit Verlängerungsmöglichkeiten anzuschaffen. Ansonsten gehören zu einer guten Ausrüstung ein 30cm-Lineal, ein Geodreieck, Bleistift, Buntstifte, Spitzer und ein feines Sandpapier zum Schärfen der Zirkelspitze. Filzschreiber sind für die geometrischen Zeichnungen ungeeignet, da sie durch das Papier hindurch diffundieren. Bis zum Beginn der konstruktiven Geometrie sollten für jedes Kind mindestens der Zirkel und das Lineal im Klassenschrank bereitliegen. Neben den linienfreien DIN A4-Epochenheften habe ich gerne größere Zeichnungen auf DIN A3-Blättern ausführen lassen, für welche die Kinder eine Mappe mitbrachten.

Wenn nun der erste Tag der Behandlung der konstruktiven Geometrie kommt, ist es ratsam, die Zeichengeräte zwar bereitzulegen, aber noch nicht auszuteilen. Zuerst zeigt man an einem Zirkel, welche Teile er besitzt und wie mit ihm umzugehen ist. Man weist auf die Spitze, die bei einem Herunterfallen leicht verbogen werden kann, was den Zirkel erheblich verschlechtert; man benennt die beiden *Schenkel* des Zirkels, führt vor, wie Spitze und Mine ein- und ausgesetzt sind, welche Schwierigkeiten entstehen, wenn von den Feststellschrauben eine verloren geht, wie man mit dem Sandpapier die Mine schräg keilförmig (nicht rund) schärft, und schließlich, wie man sachgerecht ihn anfasst und einen Kreis zeichnet:

Mit der linken Hand wird der Schenkel mit der Stahlspitze angefasst. Die rechte Hand hält den Zirkel am Griff. (Linkshänder greifen umgekehrt.) Die linke Hand führt dann die Stahlspitze zu der Stelle, wo der Kreismittelpunkt sein soll, drückt sie leicht hinein und lässt los. Die rechte Hand dreht am Griff den Zirkel im Uhrzeigersinn so herum, dass die Ebene durch die beiden Zirkelschenkel möglichst senkrecht zum Papier steht. Sie kann auch leicht nach vorne in Bewegungsrichtung geneigt sein. Die zuletzt beschriebene Handhabung des Zirkels beim Zeichnen wird am besten mit einem großen Tafelzirkel vorgeführt.

Über das Lineal ist nur wenig zu sagen. Indem der Lehrer mit dem Finger leicht über die Zeichenkante streicht, beschreibt er ihre Glätte. Die Gefahr ist, dass beim Fallen oder Schlagen diese Kante eine Kerbe bekommt, wodurch das Lineal für ein genaueres Arbeiten unbrauchbar wird. Nach dem Austeilen der Zeichengeräte kann jedes Kind sich selber durch Entlanggleiten an der Zeichenkante von der Qualität seines Werkzeuges überzeugen.

Dieses liebevoll-ausführliche Besprechen der Werkzeuge hat zur Folge, dass die Kinder sehr viel sorgfältiger mit ihnen umgehen. Das Wertschätzen eines guten Werkzeuges kann nicht gründlich genug vermittelt werden. Wie viel kann man in dieser Hinsicht von dem verehrten Schweizer Kollegen Ernst Bühler lernen!

Bezeichnungen

Wenn aus dem Unterricht ein Bedürfnis dafür entstanden ist, sich knapp und mit Bezug auf Zeichnungen auszudrücken, sollten auch Bezeichnungen für die Ecken (Punkte), Seiten, Geraden und Winkel von Figuren systematisch besprochen werden. Das kann in der traditionell üblichen Weise oder auch etwas abweichend geschehen. Wir bezeichnen Punkte mit großen lateinischen Buchstaben, Geraden oder auch Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben und Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben. Diese Bezeichnungen sind heute noch weithin üblich, auch in Ländern, die sonst gar nicht die lateinische oder griechische Schrift verwenden. Deshalb ist es zum Beispiel nicht allzu schwer, sich in einem russischen Geometriebuch zu orientieren.

Wir werden - vor allem in späteren Jahren - aber auch Geraden durch Angabe von zwei Punkten, z.B. AB , kennzeichnen. Ebenso kann man Punkte durch Angaben von zwei Geraden, z.B. als ab , beschreiben. AB bedeutet die Verbindungsgerade der Punkte A und B , ab der Schnittpunkt der Geraden a und b . AB bedeutet in der üblichen Weise die Strecke zwischen den Punkten A und B .²⁶

Geraden- und Kreisübungen

Mit den neu eingeführten Werkzeugen sollten die Kinder zunächst durch eine Reihe von einfachen Übungen vertraut gemacht werden. Dabei ist von vornherein auf ein exaktes Arbeiten zu achten. Die nicht zu weichen Bleistifte müssen gut gespitzt sein. Soll ein Kreismittelpunkt auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen, so muss die Genauigkeit größer als 1mm sein. Vor dem Zeichnen ist im Allgemeinen der Kreismittelpunkt zu markieren, um ihn leicht wiederfinden zu können. Besonders beim Zeichnen auf der Tafel ist dies wichtig. Die Kreisrosette oder die Kreisrosettenfelder zeigen sehr rasch, wer genau zu arbeiten versteht. In den Abbildungen sind eine Reihe von Anregungen gegeben, die leicht ergänzt werden können. Weitere Anregungen findet man zum Beispiel in dem alten Lehrbuch von Fialkowsky²⁷ und bei Alexander Strakosch.²⁸

Sind Punkte auf einer Geraden in gleichen Abständen abzutragen, so wird im Allgemeinen am besten der Zirkel mit zwei Spitzen (statt der Bleistiftmine) ausgestattet und so durch Umschlagen jeweils um den letzten Punkt der neue nächste Punkt gewonnen. Natürlich gibt es auch Fälle, in denen die Verwendung des Zentimetermaßes zuträglich ist, doch wird dies im Allgemeinen zu ungenaueren Ergebnissen führen.

Zeichenübungen mit Zirkel und Lineal

(Es ist gedacht, dass die Kinder nach Wunsch die Zeichnungen einfärben können.)

1. Der einfache Kreis (Abb. 65).
2. Eine Schar konzentrischer Kreise wächst in gleichen Schritten. Dafür werden zunächst die gleichen Schritte auf einer Strecke abgetragen (Abb. 66).
3. Die Kreisrosette (Abb. 67). Bei genauem Zeichnen schließt sich die Rosette. Ein Beweis erfolgt in der sechsten Klasse. Diese Übung kann zu Rosettenfeldern ausgeweitet werden. Außerdem können, wie Strakosch es vorschlägt, viele geradlinige Figuren darin entdeckt werden. Zum Beispiel kann man die vielfältigsten Vierecks- und Dreiecksformen darin entdecken. Insbesondere kann so auch das regelmäßige Sechseck in einem Kreis konstruiert werden.
4. Auf einer vertikalen Geraden sind Punkte in gleichem Abstand markiert. Wähle einen geeigneten Punkt als Mitte und zeichne um die anderen Punkte Kreise durch diese Mitte (Abb. 68).
5. Zeichne von den sechs Blättern der Kreisrosette nur jedes zweite. Verbinde alle Punkte miteinander und mit dem Mittelpunkt (Abb. 69).
6. Zeichne um einen Punkt einen Kreis und solche vier weiteren Kreise aus der Kreisrosette, dass du einen rechten Winkel hineinzeichnen kannst (Abb. 70). *Lösung:* Zeichne einen Kreis und zu ihm eine horizontale Zentrale. Zu ihr ist die Senkrechte zu konstruieren. Zeichne um die Schnittpunkte der Zentrale mit dem Kreis zwei Kreise mit dem Radius des ersten. Fahre fort wie in der Zeichnung.
7. Ausgehend vom Scheitel werden auf den Schenkeln eines Winkels gleiche Strecken wiederholt abgetragen. Die Teilpunkte werden in der dargestellten Weise verbunden (Abb. 71).
Mit der Figur von Aufgabe 5 lässt sich ein rechter Winkel konstruieren. Damit kann man auch das Quadrat konstruieren. (Wie?) In einem Quadrat mit 8 cm Seitenlänge sind nun im Zentimeter-Abstand die Teilpunkte auf den Seiten abgetragen. Um jeden Teilpunkt ist ein Kreis mit gleichem Radius gezeichnet. Wenn verschiedene Kinder verschiedene Radien wählen, kann man gemeinsam eine schöne Verwandlungsreihe erzeugen. Natürlich können das Quadrat und die Abstände der Teilpunkte auch sehr unterschiedlich gewählt werden. Günstig ist es Allgemeinen, mit einem rechten Winkel zu beginnen, vom Scheitel aus die Schrittgröße so oft wie gewünscht auf beiden Schenkeln abzutragen und dann erst das Quadrat zu vollenden (Abb. 72).
9. Wie in der achten Aufgabe wird ein Quadrat mit gleichmäßig unterteilten Seiten konstruiert. In der dargestellten Weise werden dann die Teilpunkte untereinander verbunden (Abb. 73).

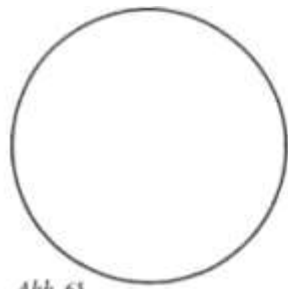


Abb. 63

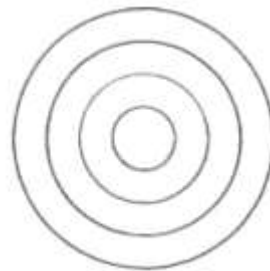


Abb. 66

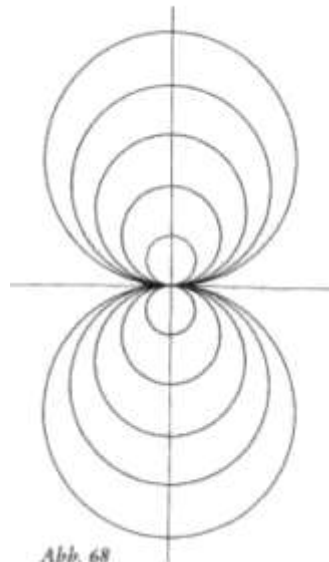


Abb. 68

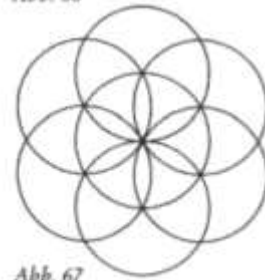


Abb. 67

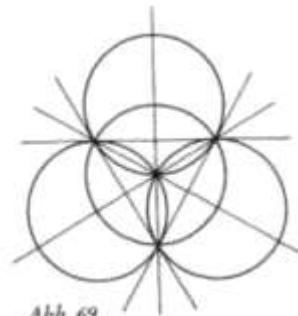


Abb. 69

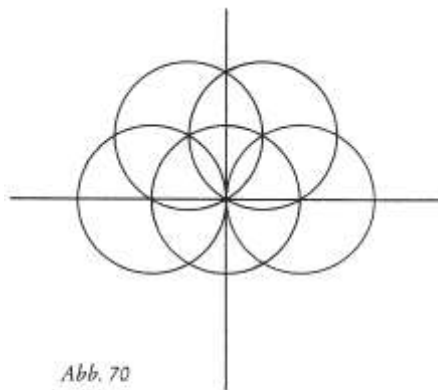


Abb. 70



Abb. 71

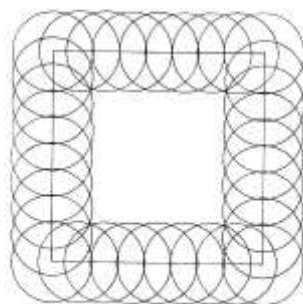


Abb. 72

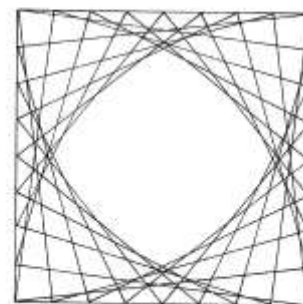


Abb. 73

Abb. 65 – 73: Geraden- und Kreisübungen

Die geometrischen Grundkonstruktionen

Methodisches

Ist die Handhabung der Werkzeuge ausreichend eingeübt, kann mit der Behandlung der Grundkonstruktionen begonnen werden.

Die vollständige Behandlung einer geometrischen Konstruktionsaufgabe durchläuft eine Reihe von Stufen, die zwar im Einzelfall kurz sein können oder mit einer anderen Stufe fast zusammenfallen oder auch einmal übersprungen werden, die aber doch zu ihr gehören. Louis Locher-Ernst beschrieb diese Stufen in seinem Buch *Mathematik als Vorschule zur Geist-Erkenntnis* folgendermaßen:

«Beim Lernen der Mathematik wird eine große Menge von Aufgabengelöst. Leider wird aber zu wenig darauf geachtet, dass auch wenigstens einzelne Aufgaben *vollständig* durchgeführt werden. Eine wirklich vollständige Lösung braucht viel Zeit. Die daran zu erlebenden Schritte werden aber jedem, der sie durchgemacht hat, unvergesslich bleiben. Ich will den Vorgang einer solchen Lösung kurz schildern. Es handle sich um irgendein geometrisches Problem (z.B. Konstruktion eines Vierecks aus fünf Daten). Die unmittelbar vorgelegte Aufgabe enthält ganz *bestimmte* Daten (z.B. nicht nur die Angabe <Winkel zwischen den Diagonalen, sondern auch dessen verlangte Größe). Die Griechen sprachen deshalb von der *Protasis*, der allgemeinen Aufgabe, und der *Ekthesis*, der bestimmt vorgelegten Aufgabe. Im nächsten Schritt, der *Auflösung* (*Analysis*), handelt es sich nun darum, eine Brücke zu bauen von dem Gesuchten aus zudem Gegebenen hin. Dazu ist ein gewisses Maß von mathematischer Phantasie nötig, ferner wird die Brücke umso leichter zu finden sein, je mehr einschlägige mathematische Wahrheiten in das Bewusstsein gehoben werden können. Ist das Grundgerüst der Brücke geschaffen, so geht man im vierten Schritt, der *Zurückführung* (*Apagogä*), daran, gemäß dem Ergebnis des dritten Schrittes die vorgelegte Aufgabe auf eine Kette bekannter einfachster Grundaufgaben zurückzuführen. Der Gang vom allgemeinen Problem bis zur Zurückführung verläuft *analysierend*: Die allgemeine Aufgabe wird aus dem Weltzusammenhang herausgeschält, enthüllt und zergliedert. Da stellt sich eine natürliche Ruhepause ein. Es tritt eine Wendung ein, indem die weiteren Schritte ihre Richtung umkehren. Der fünfte Schritt besteht in der *Konstruktion* (*Kataskeuä*). Gemäß der Zurückführung werden die einzelnen erforderlichen Konstruktionen *wirklich* ausgeübt. Der nächste Schritt, der *Beweis* (*Apodeixis*), hat zu zeigen, dass die ausgeführte Konstruktion den durch die vorgelegte Aufgabe gestellten Forderungen in allen Teilen Genüge leistet. Im Wesentlichen wird dabei die Analysis in umgekehrter Reihenfolge durchgegangen. Im letzten Schritt, der *Abgrenzung* (*Diorismos*), wird Rückblick und Vorschau geübt. Die verschiedenen, durch die Ekthesis zum Teil ausgeschlossenen Möglichkeiten des allgemeinen Problems sind möglichst umfassend in Berücksichtigung zu ziehen, und es ist zu prüfen, was diese Möglichkeiten zur Folge haben. Meist ergeben sich daraus wieder neue Probleme. Der Kreis ist damit geschlossen. Im Ganzen genommen ist der Gang von der erwähnten Ruhepause an synthetisierend. Er endet mit der Einordnung der zergliederten Aufgabe in die Zusammenhänge innerhalb der ideellen Welt.»²⁹

Für die pädagogische Behandlung ergänzt sich diese Stufenfolge noch, da auf eine richtige Verankerung des Behandelten im Seelischen des Kindes zu achten ist. Damit ergibt sich eine Abfolge, die etwa so beschrieben werden kann:

Hinführung zur Fragestellung. Dies geschieht häufig durch eine kurze Erzählung, mit der auf eine Lebenssituation hingewiesen wird. Herausarbeiten des mathematischen Problems - die speziell vorgelegte Aufgabe - Lösung des Problems Beschreibung - der Lösung - Begründung der Konstruktion - vereinfachte Konstruktion für die tägliche handwerkliche Anwendung - Darstellung der zugehörigen Ganzheit in einer schönen Zeichnung - Anwendungen der Konstruktion in unterschiedlichsten Aufgabenstellungen - Erweiterung der Fragestellung - Hinführung zu neuen Fragestellungen.

An der Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke soll diese Stufenfolge in einfacher Form dargestellt werden. Durchläuft man mit den Kindern diese Stufenfolge, so kann erlebt werden, wie das Kind zunächst an die Welt unter einem bestimmten Aspekt angeschlossen wird. Dann zieht es heran, was es aus dem Geometrieunterricht schon weiß. In der Lösung werden seine ganz individuellen Kräfte aufgerufen. In der Beschreibung und Begründung der Konstruktion bringt es jeden Einzelschritt zum Bewusstsein. Aus dieser Verengung weitet es dann allmählich wieder den seelischen Blick auf größere Zusammenhänge und neue Fragestellungen.

1. Grundkonstruktion: Die Mittelsenkrechte

Hinführung zur Fragestellung:... Fortsetzung im Buch